**Københavns Universitet**
**Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1993**

# Matematik 3 SS

Opgaver til besvarelse i 3 timer fredag den 18. juni 1993.

## Opgave 1 (50%)

Det bemærkes, at en række af nedenstående spørgsmål kan besvares uafhængigt af de øvrige spørgsmål (resultaterne, der er opgivet for nogle spørgsmål, kan uden videre benyttes ved besvarelsen af andre spørgsmål).

Der udføres et kast med 5 terninger. Med $N_\nu$ betegnes antallet af terninger, der viser $\nu$ øjne; $\nu = 1, \cdots, 6$. (Vi har således $\Sigma_1^6 N_\nu = 5$).

(i) Bestem fordelingen af $N_6$.

(ii) Beskriv i ord hændelsen

$$\bigcap_{\nu=1}^{6} \{N_\nu \leq 1\} ,$$

og beregn dens sandsynlighed.

(iii) Bestem sandsynligheden

$$P(N_1 = 1 \,,\; N_5 = N_6 = 2) \,,$$

og vis dernæst, at sandsynligheden for "to par", dvs. sandsynligheden for hændelsen "der findes $\nu \neq \mu$ så $N_\nu = N_\mu = 2$", er $\frac{25}{108}$.

(iv) Bevis, at sandsynligheden for at der er flest 6'ere, er

$$P(N_6 > \max_{\nu \leq 5} N_\nu) = \frac{73}{648} \,.$$

**Bemærkning**. Dette kan gøres på mange måder. For én af metoderne kan resultatet af (i) udnyttes, for en anden kan resultaterne under (ii) og (iii) udnyttes.

(v) Hvor mange kast med 5 terninger vil du forvente, man skal udføre for at få et kast med flest 6'ere? (Svaret skal naturligvis begrundes!)

(vi) Vis, at hvis $n \geq \frac{\log(1-\frac{a}{100})}{\log(1-\frac{73}{648})}$, så er sandsynligheden mindst $a\%$ for i $n$ kast med 5 terninger at få mindst ét kast med flest 6'ere. (F.eks. for $a = 95$, opfylder $n = 26$ uligheden).

(vii) Ole og hans kammerater spiller gang på gang et spil, hvor et enkelt spil går ud på at kaste fem terninger, indtil man opnår et kast med flest seksere. For hvert spil noterer man sig antallet af kast, der udføres for at opnå situationen "flest seksere". Der opstår mistanke om at Ole's terninger ikke opfører sig som "ærlige" terninger.



Opgave 1 fortsættes på side 2

Opstil en statistisk model for det betragtede spil, idet man som parameter bruger sandsynligheden $p$ for i et enkelt kast med Ole's terninger at få "flest seksere".

(viii) I 50 spil, hvor Ole hele tiden har brugt sine egne terninger, har han opnået følgende resultater

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 10 | 12 | 2 | 1 | |
| | 13 | 4 | 21 | 17 | 4 | |
| | 5 | 1 | 40 | 9 | 4 | |
| | 8 | 4 | 15 | 3 | 1 | |
| | 1 | 12 | 6 | 3 | 3 | |
| | 10 | 15 | 5 | 8 | 1 | |
| | 9 | 5 | 5 | 4 | 16 | |
| | 18 | 7 | 7 | 17 | 5 | |
| | 7 | 5 | 3 | 10 | 10 | |
| | 1 | 18 | 5 | 3 | 15 | |
| Sum | 74 | 81 | 119 | 76 | 60 | sum total : 410 |

(I det sidste spil måtte Ole altså kaste terningerne 15 gange for at opnå et kast med flest seksere).

Udfør et test af nulhypotesen svarende til en antagelse om at terningerne opfører sig som "ærlige" terninger, mod den alternative hypotese svarende til en formodning om at terningerne ikke opfører sig som de "bør".

**Bemærkning.** Man kan enten udføre et standardtest (kvotienttest), eller (måske lettere!) opskrive en testsandsynlighed der direkte bygger på ens sunde fornuft. Ved testet kan man eventuelt have glæde af vedlagte materiale vedrørende $\chi^2$-fordelingerne og normalfordelingen (findes bagest i opgavesættet).

## Opgave 2 (25%)

(i) Lad $X$ være en stokastisk variabel defineret på udfaldsrummet $\Omega$, og lad $B$ være en hændelse med positiv sandsynlighed. Giv såvel definitionen af *fordelingen* $P_X$ af $X$ som definitionen af den *betingede fordeling* af $X$ givet hændelsen $B$.

(ii) Idet $(N(t))_{t>0}$ er en Poissonproces med intensitet $\lambda$ og $s$ og $S$ er reelle tal med $0 < s < S$, skal man bestemme den betingede fordeling af $N(s)$ givet hændelsen $N(S) = 100$ og vise, at det drejer sig om en af de kendte diskrete fordelinger.

## Opgave 3 (25%)

Lad $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_2 < x_1\}$ og lad $(X_1, X_2)$ have en to-dimensional fordeling med tæthedsfunktion $f$ givet ved

$$f(x_1, x_2) = \frac{27}{2\mu^3} x_1 e^{-\frac{3x_1}{\mu}} \; ; \; (x_1, x_2) \in D \, ,$$

Opgave 3 fortsættes på side 3

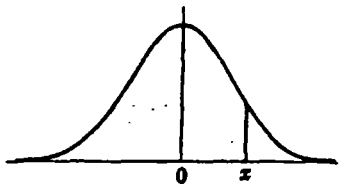
hvor $\mu$ er en positiv parameter. Med $Y_1$ og $Y_2$ betegnes de stokastiske variable givet ved

$$Y_1 = X_1 \ , \ Y_2 = \frac{X_2}{X_1} \ .$$

(i) Bestem den simultane fordeling af $(Y_1, Y_2)$, de to tilhørende marginale fordelinger og vis, at $Y_1$ og $Y_2$ er uafhængige.

(ii) Til bestemmelse af parameteren $\mu$ foreligger en stikprøve af størrelse $n$ fra $Y_1 = X_1$'s fordeling. Bestem den tilhørende maksimaliseringsestimator af $\mu$.

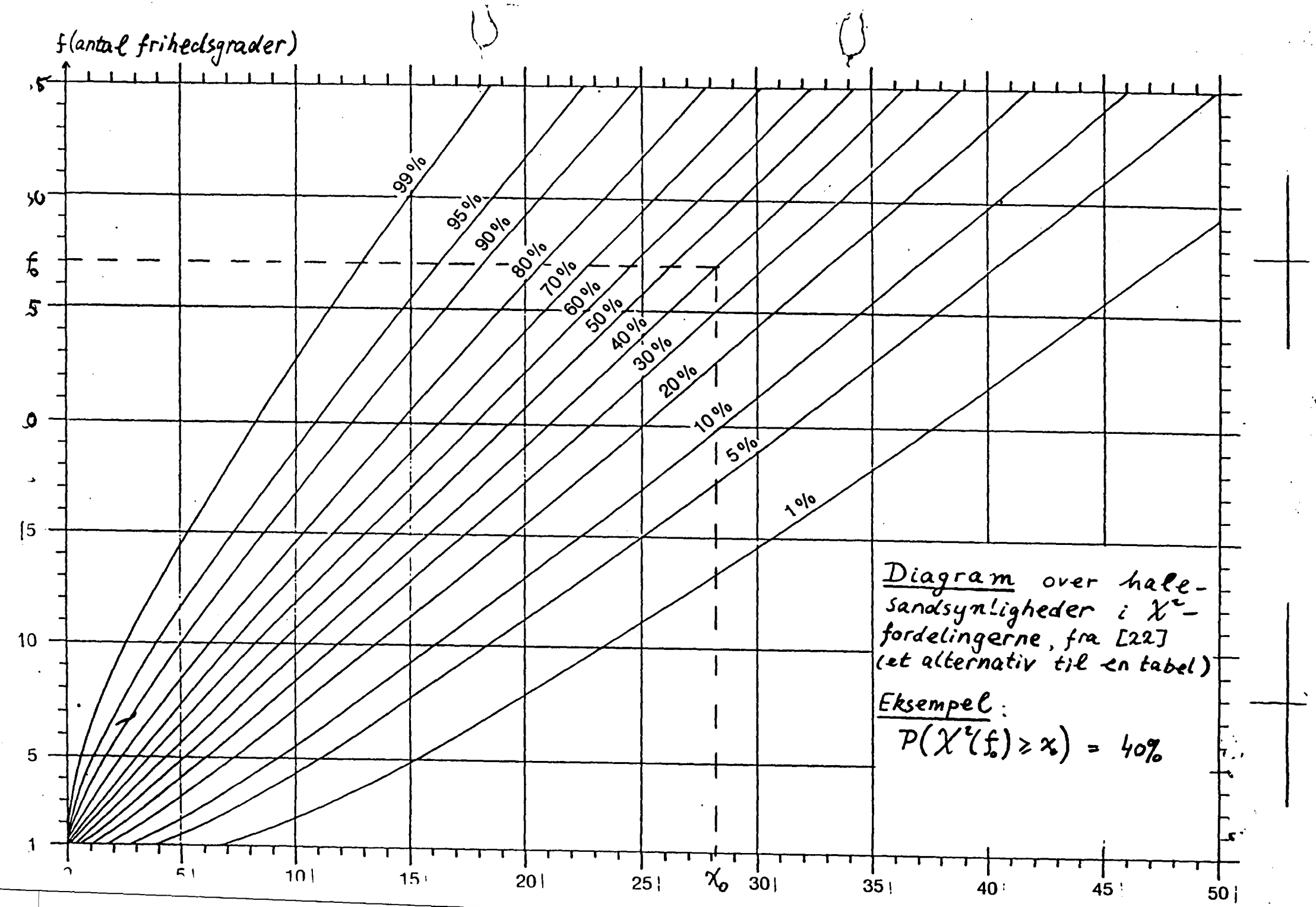
(iii) Vis, at den i (ii) fundne estimator er *central*, dvs. estimatorens fordeling har middelværdien $\mu$.

| TABLE 47 | AREAS UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE from $-\infty$ to $x$ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$ |  |
|---|---|---|



NOTE: $\operatorname{erf}(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5754 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7258 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7518 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7612 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7996 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 |
| 3.5 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 |
| 3.6 | .9998 | .9998 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 |
| 3.7 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 |
| 3.8 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 |
| 3.9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |


f (antal frihedsgrader)
99%
95%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
5%
1%
$f_0$
$\chi_0$
Diagram over hale-sandsynligheder i $\chi^2$-fordelingerne, fra [22] (et alternativ til en tabel)
Eksempel:
$P(\chi^2(f_0) \geq x_0) = 40\%$