Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1995

Matematik 3 SS

Opgaver til besvarelse i 3 timer den 16. juni 1995.

Opgave 1

Et middagsselskab på n ægtepar anbringes på $2n$ pladser, ligeligt fordelt omkring et rundt bord.

Bordsætningen foretages tilfældigt, dog således, at hveranden plads besættes med en herre og hveranden med en dame.

Med T_n betegnes den stokastiske variabel, der angiver, hvor mange ægtepar, der har fået hinanden til bords. Og med S_n betegnes den stokastiske variabel, der angiver, hvor mange ægtepar, der er kommet til at sidde ved siden af hinanden. I det skitserede eksempel har vi således $T_5 = 1$ og $S_5 = 3$.

(i) For $n = 2$ og $n = 3$ skal man bestemme T_n's og S_n's fordelinger.

(ii) Idet vi med p_n betegner sandsynligheden $P(T_n = 0)$, skal man vise, at såfremt p_n'erne kendes, kan fordelingen for T_n bestemmes.

Vejledning. Vis, at $P(T_n = k) = p_{n-k}/k\,!$ for $0 \leq k \leq n$ (her har vi sat $p_0 = 1$).

(iii) Bestem p_n.

Vejledning. Man står sig ved at finde et udtryk for $1 - p_n = P(T_n > 0)$. Hertil kan man benytte beregning ved inklusion og eksklusion.

(iv) Afgør, om $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

Opgave 2

Lad $X_1, X_2, \cdots$ være en følge af uafhængige stokastiske variable, alle eksponentialfordelte med parameter $\lambda > 0$. Definer, for hvert $n \in \mathbb{N}$, stokastiske variable Y_n og Z_n ved

$$Y_n = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}\,,$$
$$Z_n = X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3 + \cdots + \frac{1}{n}X_n\,.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

(i) Lad $n \in \mathbb{N}$ og antag, at den stokastiske variabel Z er uafhængig af X_{n+1} og at tæthedsfunktionen for Z er

$$f(z) = n\lambda e^{-\lambda z}(1 - e^{-\lambda z})^{n-1}\,; \quad z > 0\,.$$

Bestem den simultane tæthedsfunktion for den 2-dimensionale stokastiske vektor $(W, \frac{1}{n+1}X_{n+1})$, hvor

$$W = Z + \frac{1}{n+1}X_{n+1}\,.$$

(ii) Bestem tæthedsfunktionen for W fra spørgsmål (i).

Vejledning. Enten kan man udnytte resultatet af (i), eller man kan regne mere direkte.

(iii) Bestem, for ethvert $n \in \mathbb{N}$, tæthedsfunktionen for Z_n.

Vejledning. Anvend induktion under udnyttelse af (i) og (ii).

(iv) Bestem, for ethvert $n \in \mathbb{N}$, fordelingsfunktionen og tæthedsfunktionen for Y_n og vis herved, at Y_n og Z_n er identisk fordelte.

(v) Bestem middelværdi og varians af Y_n og undersøg, om $E(Y_n) \to \infty$ for $n \to \infty$ og om $\sigma^2(Y_n) \to \infty$ for $n \to \infty$.

Opgave 3

Antag, at $x_1, x_2, \cdots, x_n$ er en stikprøve af størrelse n fra en fordeling med tæthedsfunktion

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}\,; \quad 0 < x < 1\,.$$

Her er n et fast naturligt tal og $\Theta = \mathbb{R}_+$

(i) Bevis, at produktet $x_1 x_2 \cdots x_n$ er en sufficient stikprøvefunktion.

(ii) Bestem maksimaliseringsestimatoren for θ.

(iii) Idet $n = 10$ og $x_1 x_2 \cdots x_{10} = 1.05 \cdot 10^{-4}$, skal man gennemføre et (approksimativt) kvotienttest af nulhypotesen $H_0 = \{1\}$ med den alternative hypotese $H_1 = \Theta \setminus H_0$.