Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren* 1995

Matematik 3 SS

Opgaver til besvarelse i 3 timer den 11. oktober 1995

Opgave 1

En spiller i et billedlotteri har købt en spilleplade med n forskellige billeder.

Sålænge lotteriet varer, udtrækkes hver dag et billede fra en urne. Dag 0 er der N forskellige billeder i urnen, herunder de n billeder på spillerens spilleplade. Udtrækningerne begynder dag 1 og slutter dag N. Det antages, at $N > n$. Udtrækningerne foretages hver dag tilfældigt blandt alle billeder i urnen, og udtrækningerne er uden tilbagelægning (urnen er således tom efter udtrækningen på dag N).

Med T betegnes den stokastiske variabel, der angiver antallet af billedkort, der passer med et billede på spillerens spilleplade, som er udtrukket før det første billede udtrækkes, som ikke passer med noget billede på spillepladen.

Hvis f.eks. $n = 3$ og $N = 5$ og der udtrækkes billederne:

hund, kat, blyant, bil, kop

i nævnte rækkefølge, og spilleren har en spilleplade med billederne bil, kat og hund, så er $T = 2$.

(i) Bestem T's fordeling (anfør de mulige værdier samt de tilhørende punktsandsynligheder).

(ii) Opskriv et udtryk til bestemmelse af T's middelværdi.

Bemærkning: Faktisk er T's middelværdi en uhyre enkel funktion af n og N. Det kræves imidlertid ikke, at man finder et simpelt funktionsudtryk for middelværdien; blot man finder et udtryk, der i princippet tillader at beregne T's middelværdi for ethvert konkret sæt af værdier for n og N, betragtes spørgsmålet som besvaret.

(iii) Bestem middelværdi og varians for T i tilfældet $n = 3$, $N = 5$.

(iv) Lad igen $n = 3$ og $N = 5$. Idet det antages, at spilleren har betalt 100 kr. for spillepladen, og at lotteriet udbetaler en gevinst på 1000 kr. såfremt $T = 3$ og en gevinst på 100 kr. såfremt $T = 2$, skal man afgøre, om man finder det favorabelt for spilleren at deltage i lotteriet (begrundelse for svaret skal gives).

Opgave 2

(i) Bestem konstanten k således, at såvel f som g nedenfor er tæthedsfunktioner:

$$f(x) = kx(1-x)^2; \quad 0 < x < 1,$$
$$g(x) = kx^2(1-x); \quad 0 < x < 1.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

I resten af opgaven betegner X og Y stokastiske variable således, at X har f som tæthed og Y har g som tæthed.

(ii) Bestem middelværdi og varians for såvel X som Y. Vis, at Y og $1 - X$ er identisk fordelte.

(iii) Vis, at $X + Y$ og $X - Y$ er ukorrelerede.

(iv) Idet det i dette spørgsmål yderligere antages, at X og Y er uafhængige, skal man vise, at begge sandsynlighederne $P(X + Y > \frac{3}{2})$ og $P(X - Y > \frac{1}{2})$ er positive. Desuden skal man afgøre, f.eks. under udnyttelse heraf, om $X + Y$ og $X - Y$ er uafhængige.

(v) I dette spørgsmål antages, at $\operatorname{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{25}$. Bevis, at så er Y en funktion af X, og bestem denne.
Vejledning. Se f.eks. på variansen af $X + Y$.
Er $X + Y$ og $X - Y$ uafhængige i dette tilfælde?

Opgave 3

I denne opgave ses på en statistisk model svarende til n uafhængige observationer $x_1, x_2, \cdots, x_n$ fra en stokastisk variabel med tæthedsfunktion givet ved

$$f(x) = \theta(\theta + 1)x^{\theta - 1}(1 - x)\ ; \quad 0 < x < 1,$$

hvor θ er en positiv parameter.

(i) Opskriv likelihoodfunktionen hørende til modellen.

(ii) Vis, at stikprøvefunktionen angivet ved produktet $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$ er sufficient.

(iii) Bevis, at maksimaliseringsestimatoren $\hat{\theta}$ (i noterne også kaldet maksimumlikelihoodestimatoren) er bestemt ved ligningen

$$\frac{1}{\hat{\theta}} + \frac{1}{\hat{\theta} + 1} = \frac{1}{n} \log \frac{1}{q},$$

hvor q betegner produktet $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$.

(iv) Idet θ_0 og θ_1 betegner positive tal med $\theta_0 < \theta_1$ og γ er en konstant med $0 < \gamma < 1$, skal man vise, at det test, der har kritisk område (også kaldet forkastelsesområde) givet ved

$$C = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n \geq \gamma\},$$

er et bedste test af nulhypotesen $H_0 : \theta = \theta_0$ mod den alternative hypotese $H_1 : \theta = \theta_1$.