Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1994

Matematik 3 SS

Opgaver til besvarelse i 3 timer fredag den 17. juni 1994.

Opgave 1 (35%)

En forsamling på 20 politikere består af 10 fra parti A, 8 fra parti B og 2 fra parti C. Et udvalg ønskes nedsat.

(i) De to fra C ønsker, at udvalget skal have en sådan størrelse, at sandsynligheden for at C bliver repræsenteret i udvalget, når medlemmerne vælges tilfældigt, er mindst 25%. Hvilket krav stiller det til udvalgets størrelse?

(ii) Man enes om en udvalgsstørrelse på 3. Idet udvalgets medlemmer udtages tilfældigt blandt de 20 politikere, skal man angive et stokastisk element, der karakteriserer den partimæssige sammensætning af udvalget samt bestemme den tilhørende fordeling.

(iii) Under henvisning til situationen behandlet i spørgsmål (ii), skal man bestemme den betingede fordeling under forudsætning af, at C bliver repræsenteret i udvalget.

Opgave 2 (35%)

Et apparat er opbygget som vist på figuren.

I hvert knudepunkt A, B, α, β og γ er anbragt en delkomponent. Levetiden for disse er uafhængige eksponentialfordelte stokastiske variable med parametre henholdsvis $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_\alpha$, λ_β og λ_γ. Det antages, at $\lambda_A = \lambda_B = \lambda$ og $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma = \mu$.

Apparatet fungerer, såfremt der findes en vej fra inputsiden til outputsiden således, at alle delkomponenter, der er anbragt i knudepunkter på vejen, fungerer.

(i) Bestem fordelingen af apparatets levetid V udtrykt ved parametrene λ og μ.

(ii) Bestem middellevetiden af apparatet og vis, at denne for $\lambda \ll \mu$ (λ meget mindre end μ) omtrent er $\frac{11}{6}E(V_\alpha)$, hvor V_α er levetiden af delkomponenten i knudepunktet α.

(iii) Hvilket krav må der stilles til konstanterne a og b, hvor $a > 0$ og $b \in \,]0,1[\,$, for at der til hvert $\lambda > 0$ skal kunne findes et $\mu > 0$ således, at uligheden $P(V \le \frac{a}{\lambda}) \le b$ er opfyldt?

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (30%)

I denne opgave betragtes en speciel diskret fordeling koncentreret i de naturlige tal fra 1 til 14 (begge iberegnet) med punktsandsynligheder p_i som angivet i tabellen. Der foreligger en stikprøve af størrelse 25, der har givet de i tabellen angivne antal observationer svarende til de mulige værdier af i.

i	p_i angivet i %	antal observationer x_i
1	2	1
2	4	0
3	4	0
4	6	2
5	6	1
6	6	2
7	8	1
8	8	2
9	8	3
10	8	1
11	10	3
12	10	2
13	10	4
14	10	3

(i) Foretag en inddeling af $\{1, 2, \cdots, 13, 14\}$ i 4 grupper, således at det forventede antal observationer i hver gruppe er mindst 5. Angiv de forventede og de observerede antal for hver gruppe.

(ii) Foretag en test af hypotesen, at stikprøven er fra den opgivne fordeling med punktsandsynlighederne p_i (angiv den statistiske model, der er anvendt, og forklar principperne for det anvendte test, gerne med henvisning til noterne).

Bemærk. Den vedlagte tabel kan udnyttes ved besvarelsen af (ii).