Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998-99

Matematik 3 RE

Opgave til besvarelse i 3 timer.

Sættet er på 2 sider og består af 2 opgaver.

Alle skriftlige hjælpemidler er tilladt.

I opgave 1 kan alle spørgsmål besvares uden at det foregående spørgsmål er besvaret.

I opgave 2 kan man godt benytte et resultat fra et tidligere spørgsmål uden at dette er besvaret.

Opgave 1 (30 points)

Afgør om hvert af følgende udsagn er sandt eller falsk. Angiv en kortfattet begrundelse eller et eget argument.

1. Der findes en (kontinuert) 3-dimensional irreducibel repræsentation af SU(2).
2. Der findes en (kontinuert) 3-dimensional irreducibel repræsentation af Γ_1.
3. Der findes en (kontinuert) 3-dimensional repræsentation af Γ_1.
4. Hvis T er en (kontinuert) 5-dimensional kompleks matrix repræsentation af SU(2), så er $T(\mathrm{SU}(2))$ er kompakt.

Vi lader K_2 betegne gruppen af invertible reelle øvre trekantsmatricer, d.v.s.

$$K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad b \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. i) K_2 er en kompakt delmængde af $\mathbb{R}^4$.
   ii) K_2 er en sammenhængende undergruppe af $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.
6. Hvis χ er en 5-dimensional (kontinuert) irreducibel repræsentation af SU(2), da er $\chi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

Opgave 2 (70 points)

Lad G være gruppen defineret ved

$$G = \langle x, y, z \mid x^3 = y^3 = z^3 = 1, \quad xz = zx, yz = zy, \quad xy = zyx \rangle.$$

G er altså F/N, hvor F er den fri gruppe i x, y og z og N den mindste normale undergruppe af F, som indeholder x^3, y^3, z^3, $xzx^{-1}z^{-1}$, $yzy^{-1}z^{-1}$, $xyx^{-1}y^{-1}z^{-1}$.

1. Gør rede for $|G| \leq 27$.
2. Vis, at $z \in G'$ (G's kommutatorgruppe) og at $\langle z \rangle$ er normal.

Opgave 2 fortsættes på side 2

Lad ε betegne en primitiv kompleks 3. enhedsrod.

3. Vis, at der ved

$$x \to \operatorname{diag}(\varepsilon, 1) \quad y \to \operatorname{diag}(1, \varepsilon) \quad z \to \operatorname{diag}(1, 1)$$

   defineres en kompleks 2-dimensional matrix repræsentation af G.
4. Gør rede for at $G/\langle z \rangle$ er abelsk og isomorf med $C_3 \times C_3$, hvor C_3 betegner den cykliske gruppe med 3 elementer.
5. Vis, at $\langle z \rangle = G'$ og at $|G| = 9$ eller $|G| = 27$.
6. Gør rede for at der ved

$$x \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \qquad y \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad z \to \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

   bestemmes en irreducibel kompleks 3-dimensional matrixrepræsentation af G.
7. Vis, at $|G| = 27$ og at G har 9 1-dimensionale og 2 3-dimensionale irreducible repræsentationer.
8. Gør rede for at G har 11 konjugationsklasser og at x ikke er konjugeret med x^{-1}.
9. Angiv samtlige 9 1-dimensionale repræsentationer af G ved at angive værdierne på x, y og z.

Man kan i næste spørgsmål uden bevis benytte at $x^i y^j$, $0 \leq i, j \leq 2$, og z, z^2 er repræsentanter for samtlige konjugationsklasser.

10. Bestem endnu én irreducibel 3-dimensional karakter χ forskellig fra karakteren af den i 6 givne repræsentation..
    (*Tip:* Vis, at $\chi(x^i y^j) = 0 \ \ (i, j) \neq (0, 0) \mod 3$).