Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1997-98

Matematik 3 RE

Opgave til besvarelse i 3 timer.

Alle skriftlige hjælpemidler er tilladt.

I opgave 1 kan alle spørgsmål besvares uden at det foregående spørgsmål er besvaret.

I opgave 2 kan man godt benytte et resultat fra et tidligere spørgsmål uden at dette er besvaret.

Opgave 1 (35 points)

Afgør om hvert af følgende udsagn er sandt eller falsk. Angiv en kortfattet begrundelse, f.eks. med henvisning til noterne eller et eget argument.

1. $SU(2)$ er en afsluttet undergruppe af $U(2)$.
2. Der findes ingen 5-dimensionale irreducible repræsentationer af $SU(2)$.
3. $v \longrightarrow e^{iv}$ og $v \longrightarrow e^{-iv}$ er ikke ækvivalente repræsentationer af rotationsgruppen, Γ_1.
4. Mængden K_3 defineret ved
$$K_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \middle| \, a, d, f \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \, , \; b, e, c \in \mathbb{C} \right\}$$
er en afsluttet undergruppe af $GL_3(\mathbb{C})$.
5. K_3 er en sammenhængende undergruppe af $GL_3(\mathbb{C})$.

For en undergruppe G af $GL_n(\mathbb{C})$ er $\underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{A}}$ for $\underline{\underline{A}} \in G$ en matrixrepræsentation af G, som vi som bekendt kalder selvrepræsentationen af G.

6. Selvrepræsentation af K_3 er unitær.
7. Selvrepræsentation af K_3 er irreducibel.
8. $v \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{iv} & e^{2iv} - e^{iv} \\ 0 & e^{2iv} \end{pmatrix}$ definerer en unitær repræsentation af Γ_1.

Opgave 2 (65 points)

Lad G være en ikke abelsk gruppe af orden 12 frembragt af elementerne a og b, hvor a har orden 4 og b har orden 3.

Antag at der ved
$$a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad b \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

bestemmes en 2-dimensional matrixrepræsentation af G.
(ε betegner en primitiv 3'die enhedsrod, dvs. $\varepsilon^3 = 1$ og $\varepsilon \neq 1$).

1) Gør rede for at denne repræsentation er irreducibel.
2) Gør rede for at G har 2 irreducible 2-dimensionale og 4 irreducible 1-dimensionale karakterer, og vis at $|G'| = 3$.

Det følger nu, at b frembringer G', denne påstand skal ikke vises.

4) Gør rede for at a's restklasse i G/G' frembringer gruppen G/G', og vis at G/G' er en cyklisk gruppe.
5) Vis, at elementerne a, a^2, a^3 og b alle tilhører forskellige konjugationsklasser.
6) Opskriv karaktertavlen for G. (Tip: Hvis man benytter x som repræsentant for den sidste konjugationsklasse kan man for at finde karakterernes værdi på x f.eks. først vise, at a^2 er central og at $|C_x| = 2$, hvor C_x betegner konjugationsklassen, som indeholder x).
7) Vis at b og b^2 er konjugerede og at $C_x = \{a^2b, a^2b^2\}$.
8) Vis at $ba = ab^2$ og $b^2a = ab$.