Matematik 3 RE

Opgave til besvarelse i 3 timer. Alle hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1

Betragt en gruppe G af orden 20 defineret ved
$$G = \langle x, y \mid x^5 = y^4 = 1\,,\; y^{-1}xy = x^2 \rangle\,.$$

(1) Gør rede for at $G' = \langle x \rangle$.
(*Vink*: Man kan f.eks. vise, at $x \in G'$ og at $G/\langle x \rangle$ er abelsk).

(2) Idet det oplyses, at G's konjugationsklasser er de følgende (bevis herfor kræves ikke!)
$$\begin{aligned} &K_0 = \{1\}\,, && K_1 = \{x, x^2, x^3, x^4\} \\ &K_2 = \{x^i y \mid 0 \le i \le 4\}\,, && K_3 = \{x^i y^2 \mid 0 \le i \le 4\} \\ &K_4 = \{x^i y^3 \mid 0 \le i \le 4\} \end{aligned}$$
skal dimensionerne af de komplekse irreducible repræsentationer beregnes.

(3) Idet $\omega \neq 1$ er en kompleks 5. enhedsrod, skal der gøres rede for, at der ved
$$x \mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^3 \end{pmatrix}, \qquad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
defineres en kompleks repræsentation af G. Beregn karakteren ρ af denne repræsentation.

(4) Beregn $(\rho \mid \rho)$ og gør rede for at ρ er irreducibel.

(5) Angiv karaktertavlen for G.

Opgave 2

Lad som sædvanlig Γ_1 betegne rotationsgruppen.

(1) Gør rede for at der ved
$$v \longrightarrow e^{3iv} \quad v \in \Gamma_1$$
defineres en irreducibel 1-dimensional matrixrepræsentation S af Γ_1.

I det følgende udstyres $\mathbb{C}^n$ ($n = 1$ og 3) med det sædvanlige hermiteske prikprodukt (jvf. repræsentationsteori side 9).

Opgave 2 fortsættes på side 2

(2) Undersøg om S er en unitær repræsentation af Γ_1.

(3) Gør rede for at der ved

$$v \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{iv} & 0 & e^{3iv} - e^{iv} \\ 0 & e^{2iv} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3iv} \end{pmatrix} \qquad v \in \Gamma_1$$

defineres en kontinuert 3-dimensional matrixrepræsentation T af Γ_1.

(4) Undersøg om T er en irreducibel repræsentation.

(5) Find en unitær repræsentation, ækvivalent med T (*Vink*. Udstyr $\mathbb{C}^3$ med et passende hermitesk prikprodukt).

(6) Afgør om $T(\Gamma_1)$ er en kompakt undergruppe af $\mathrm{Gl}_3(\mathbb{C})$.

(7) Vis endelig at $T(\Gamma_1)$ er en sammenhængende undergruppe af $\mathrm{Gl}_3(\mathbb{C})$.

Opgave 3

Lad G være en endelig gruppe. Gør rede for, at følgende udsagn er ensbetydende.

(1) G er simpel.

(2) Enhver ikke-triviel irreducibel repræsentation af G er tro.