Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1991-92

Matematik 3 MK

Opgavesæt til besvarelse i løbet af tirsdag den 21. januar 1992.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt).

Opgavesættet udleveres fra kl. 9.00 på Matematisk Instituts kontor, E 103, og afleveres sammesteds senest kl. 17.

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1 vægtes med 30%, opgaverne 2 og 3 med 25% hver og opgave 4 med 20%.

Opgave 1

Der er givet et autonomt system i delmængden Ω af planen ved

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + y^2 - 2xy - 5x + 5y + 4 \\ y' &= xy - 4y \end{aligned}$$

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0 \} .$$

a) Find ligevægtspunkterne og bestem type samt art for de ikke udartede ligevægtspunkter.

b) Vis, at en bane $(x(t), y(t))$, $t \in I$, der til et tidspunkt $t_0 \in I$ er i 1. kvadrant, vil forblive i det lukkede 1. kvadrant for $t \geq t_0$, $t \in I$.

c) Find et lukket og begrænset område i Ω, som har den egenskab, at baner der først er kommet ind i området vil forblive i området fremover.

Opgave 2

En gruppe af orden 12 har 6 konjugeretklasser. Angiv antallet af irreducible repræsentationer og bestem ordnerne af de tilhørende repræsentationer.
Det opgives, at konjugeretklasserne K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 og K_6 har ordnerne 1, 1, 2, 2, 3 og 3 samt at funktionerne φ_1, φ_2 og φ_3 som er angivet i tabellen nedenfor alle er karakterer.

Opgave 2 fortsættes på side 2

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
φ_1	1	1	1	1	-1	-1
φ_2	1	-1	-1	1	-1	1
φ_3	3	1	-2	0	1	-1

Bestem hvilke af disse, der er irreducible og bestem karaktertabellen for gruppen.

Opgave 3

Gruppen C_{3v} har karaktertabellen

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

Gruppen C_{3v} tænkes indlejret som undergruppe af $O_3(\mathbf{R})$ på sædvanlig måde således at Z-aksen bliver den principale akse.

Med samme notation som anvendt i kurset, lader vi $Y_{l,m}$, hvor $l \in \mathbf{N}_0$, $m \in \mathbf{Z}$ og $-l \leq m \leq l$ betegne en bestemt ortonormalbasis for $L^2(S^2)$ og $D^{(3)}$ en bestemt repræsentation af $O_3(\mathbf{R})$ på $h_3 = \operatorname{span}\{Y_{3,m} \mid -3 \leq m \leq 3\}$.

Fra kurset er det kendt, at

$$D^{(3)}(C_3)Y_{3,m} = e^{-i\frac{2\pi m}{3}} Y_{3,m}$$
$$D^{(3)}(\sigma_{zx})Y_{3,m} = Y_{3,-m}\,.$$

Restriktionen af $D^{(3)}$ til C_{3v} betegnes D.

a) Opløs D i irreducible repræsentationer.

b) Bestem underrummet $h_3^{C_{3v}}$ af h_3 bestående af funktionen, der transformerer efter den trivielle repræsentation af C_{3v} under D.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1991-92
Matematik 3 MK

Opgave 4

Betragt randværdiproblemet

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + (x^2 - 7x + 12)y' + (x-5)y = 0 \\ y(0) = \frac{91}{144} \qquad y(1) = \frac{3}{4} \, . \end{cases}$$

Lad for $\varepsilon > 0$, $y(x,\varepsilon)$ betegne den eksakte løsning. Bestem for $\varepsilon > 0$ en approksimativ løsning $y^u(x,\varepsilon)$ således at

$$\max_{0 \le x \le 1} |y(x,\varepsilon) - y^u(x,\varepsilon)| = O(\varepsilon) \ \text{ for } \ \varepsilon \to 0^+ \, .$$