Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1991

Matematik 3 MK

Opgavesæt til besvarelse i løbet af mandag den 10. juni 1991.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt).

Opgavesættet udleveres fra kl. 9.00 på Matematisk Instituts kontor, E 103, og afleveres sammesteds senest kl. 17.00.

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1 vægtes med 40%, opgaverne 2 og 3 med 30% hver.

Opgave 1

Der er givet et autonomt system i $\mathbb{R}^2$ ved

$$\begin{aligned} x' &= 26x \log\left(26/(1+x^2+y^2)\right) \\ y' &= y(y-3)(y-4)(x-7) \end{aligned}$$

a) Find ligevægtspunkterne i det indre af 1. kvadrant og bestem deres type og art.

I det følgende betegner $(x(t), y(t))$ en løsning til det autonome system således at definitionsintervallet indeholder intervallet $[0, \infty[$ og $x(0) > 0$, $y(0) > 0$.

b) Vis, at banen $\{(x(t), y(t)) \mid t \geq 0\}$ er indeholdt i det indre af 1. kvadrant.

c) Vis, at der findes et $t_0 > 0$ således at $0 < x(t) \leq 6$ og $0 < y(t) \leq 6$ for $t \geq t_0$.

d) Vis, at enhver periodisk løsning, hvis bane indeholder punkter fra det indre af 1. kvadrant, er konstant.

Opgave 2

Gruppen D_{3d} har følgende opdeling i konjugeretklasser: $D_{3d} = \{E, 2C_3, 3C_2, i, 2S_6, 3\sigma_d\}$. Vi tænker os D_{3d} indlejret som undergruppe af $O_3(\mathbb{R})$ på sædvanlig måde med Z-aksen som principal akse. Virkningen af D_{3d} på $\mathbb{R}^3$ giver på naturlig måde anledning til en repræsentation $D : D_{3d} \to GL_3(\mathbb{C})$.

a) Begrund, at D kan skrives som en sum $D = D_1 \oplus D_2$ af henholdsvis en éndimensional repræsentation D_1 og en to-diemnsional repræsentation D_2.

Opgave 2 fortsættes på side 2

b) Beregn de 3 funktioner på D_{3d} givet ved $g \curvearrowright \operatorname{tr}(D_1(g))$, $g \curvearrowright \operatorname{tr}(D_2(g))$ og $g \curvearrowright \det(D(g))$. Godtgør dernæst, uden brug af karaktertabellen, at de alle er karakterer for irreducible repræsentationer.

c) Udled karaktertabellen for D_{3d} ud fra kendskabet til de 3 ovenfor fundne karakterer og de øvrige oplysninger, som er indeholdt i denne opgave.

Opgave 3

Lad S_6 betegne drejespejlingen om Z-aksen med drejningsvinklen $\frac{\pi}{3}$, og lad som sædvanlig også S_6 betegne gruppen frembragt af drejespejlingen S_6.
Med samme notation, som anvendt i kurset, lader vi $Y_{l,m}$, $l \in \mathbb{N}_0$, $-l \leq m \leq l$ betegne en bestemt ortonormal basis for $L^2(S^2)$ og $D^{(2)}$ en bestemt repræsentation af $O_3(\mathbb{R})$ på $h_2 = \operatorname{span}\{Y_{2,m} \mid -2 \leq m \leq 2\}$. Lad $\varepsilon \in \mathbb{C}$ være givet ved $\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$.

a) Vis, at
$$D^{(2)}(S_6)Y_{2,m} = \varepsilon^m Y_{2,m}\,.$$
Restriktionen af $D^{(2)}$ til gruppen S_6 giver en repræsentation D af S_6 på h_2.

b) Opløs D i irreducible repræsentationer. Karaktertabellen må gerne benyttes.

c) Bestem underrummet $h_2^{S_6}$ af h_2 bestående af funktioner, der transformerer efter den trivielle repræsentation af S^6 under D.