Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1990

Matematik 3 MK

Opgavesæt til besvarelse i løbet af fredag den 22. juni 1990.

Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt).

Opgavesættet udleveres fra kl. 9.00 på Matematisk Instituts kontor, E 103, og afleveres sammesteds senest kl. 17.00.

Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1

En gruppe G har konjugeretklasserne $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$ og K_7.
Idet nedenstående udsnit af karaktertabellen er kendt ønskes resten af tabellen, ordenen af G og antallet af elementer i konjugeretklasserne bestemt.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
χ_1	1						
χ_2	1	1			1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1			-1
χ_4			1	-1	1	-1	1
χ_5	2	$\sqrt{2}$	0				0
χ_6	2		0	$\sqrt{2}$	-2		0
χ_7		0	-2				0

Det skal fremgå af besvarelsen hvilke sætninger og resultater der benyttes ved udregningerne.

Opgave 2

Karaktertabellen for diedergruppen D_{3h} er

	E	$2C_3$	$3C_2$	σ_h	$2S_3$	$3\sigma_v$
A_1'	1	1	1	1	1	1
A_2'	1	1	-1	1	1	-1
E'	2	-1	0	2	-1	0
A_1''	1	1	1	-1	-1	-1
A_2''	1	1	-1	-1	-1	1
E''	2	-1	0	-2	1	0

Opgave 2 fortsættes på side 2

Der er givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XYZ i rummet. Vi tænker os, som sædvanligt, en ligesidet trekant A placeret i XY-planen med tyngdepunktet i $(0,0,0)$ og et hjørne i punktet $(1,0,0)$. Ligeledes opfatter vi D_{3h} som den uegentlige punktgruppe for hjørnerne i A.

a) Find for hver konjugeretklasse K_j i D_{3h}, $j = 1, \ldots, 6$ en repræsentant g_j og angiv den til transformationen g_j hørende matrix.

b) Opskriv karakteren χ for den naturlige virkning af D_{3h} på $\mathbb{R}^3$ som sum af irreducible.

Opgave 3

I $\mathbb{R}^2$ er der givet et autonomt system

$$(*)\begin{cases} x' &= x^2 + \frac{1}{2}x^2y - x^3 \\ y' &= 2y^2 - y^3 \,. \end{cases}$$

a) Bestem samtlige ligevægtspunkter.

b) Bestem type og art for ligevægtspunkter i det indre af 1. kvadrant.

c) Lad $t \to (x(t), y(t))$, $t \in I$ hvor I er et åbent interval betegne en løsning til $(*)$ hvorom det gælder, at $0 \in I$ og $(x(0), y(0)) = (3,3)$.
Vis, at for $t \in I$ og $t > 0$ gælder $0 < x(t) < 3$ og $0 < y(t) < 3$.

Opgave 4

Betragt randværdiproblemet

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + (x^2 - 5x + 6)y' + (3x - 8)y = 0 \\ y(0) = 1 \,,\ y(1) = 2 \,. \end{cases}$$

Lad for $\varepsilon > 0$, $y(x, \varepsilon)$ betegne den eksakte løsning. Bestem for $\varepsilon > 0$ en approksimativ løsning $y^u(x, \varepsilon)$ således at

$$\max_{0 \le x \le 1} |y(x,\varepsilon) - y^u(x,\varepsilon)| = O(\varepsilon) \text{ for } \varepsilon \to 0^+ \,.$$