

3MI-eksamen — Forårspensum, vinter 1999–2000

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Opgavesættet er på 2 sider og består af 7 opgaver.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter er med alle sædvanlige hjælpemidler. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af stilopgaven (Opgave 1). Opgave 1 vægtes med 90 point, og de øvrige opgaver (Opgave 2 – 7) vægtes med tilsammen 90 point.

Opgave 1 — stilopgave (90 point)

Integral med reel parameter

For at komme godt i gang med opgaven kridtes banen op: Lad (X, \mathbb{E}, μ) være et målrum, lad I være et interval på \mathbb{R} , og lad $f: X \times I \rightarrow \mathbb{C}$ være en funktion, hvorom det gælder, at snitfunktionerne f^t tilhører $\mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ for alle t i I . Husk at $f^t(x) = f(x, t)$. Sæt

$$F(t) = \int_X f^t d\mu = \int_X f(x, t) d\mu(x), \quad t \in I.$$

Formuler og bevis en sætning, som udtaler sig om kontinuitet af F (Sætning 4.26).

Formuler og bevis en sætning, som udtaler sig om differentiability af F , og hvori et udtryk for den afledede F' gives (Sætning 4.28).

Opgave 2 (10 point) Lad E være mængden af punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, for hvilke enten x eller y er rational. Vis at E er en Borel delmængde af \mathbb{R}^2 , og bestem $m_2(E)$, hvor m_2 er Lebesguemålet på \mathbb{R}^2 .

Opgave 3 (20 point) Lad $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. For hvert naturligt tal n sæt

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{hvis } |f(x)| \leq n, \\ n, & \text{hvis } f(x) > n, \\ -n, & \text{hvis } f(x) < -n. \end{cases}$$

(i) Begrund at f_n er målelig for alle naturlige tal n .

(ii) Vis at f er integrabel mht. Lebesguemålet m på \mathbb{R} hvis

$$(\dagger) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |f_n| dm < \infty.$$

(iii) Undersøg om man omvendt kan slutte at (\dagger) gælder, hvis det vides, at f er integrabel.

Opgave 4 (15 point) Sæt

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq y \leq \pi/2\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

og lad $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos(y)/y, & \text{hvis } (x, y) \in A, \\ 0, & \text{hvis } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \end{cases}$$

Gør omhyggeligt rede for, at

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dm_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dm(x) \right) dm(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dm(y) \right) dm(x),$$

og beregn dernæst integralet.

Opgave 5 (15 point) Vis at

$$\left| \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx \right| \leq \sqrt[3]{16} \left(\int_0^1 |f(x)|^3 dx \right)^{1/3}$$

for alle $f \in \mathcal{L}_3([0, 1], m)$.

Opgave 6 (10 point) Gør omhyggeligt rede for, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{x^2 + 1}{n}\right) e^{-x} dx = 1.$$

Opgave 7 (20 point) Lad μ være tællemålet på \mathbb{Z} , lad som sædvanligt m være Lebesguemålet på \mathbb{R} , og sæt

$$E = \{(t, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \mid |t| + |n| \leq 2\}.$$

- (i) Gør rede for, at E tilhører produkt σ -algebraen $\mathbb{B}(\mathbb{R}) \otimes P(\mathbb{Z})$.
- (ii) Bestem snittet E^n for alle $n \in \mathbb{Z}$.
- (iii) Bestem $(m \otimes \mu)(E)$, hvor $m \otimes \mu$ er produktmålet på $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.