Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999–2000

Matematik 3 MI (efterårspensum)

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Opgavesættet består af én stilopgave og fire opgaver og er på 2 sider.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af Stilopgaven.

Stilopgave (uden hjælpemidler)

Formulér og bevis hovedsætningen om eksistens og entydighed af integralet af ikke-negative funktioner.

Opgave 1 (med hjælpemidler)

Bevis, at mængden af punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, for hvilke enten x eller y er rational, er en Borel-delmængde af $\mathbb{R}^2$, og bestem mængdens Lebesguemål.

Opgave 2 (med hjælpemidler)

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betegne en kontinuert funktion og definér for hvert $n \in \mathbb{N}$ funktionen f_n ved

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for } |f(x)| \le n \\ n & \text{for } f(x) > n \\ -n & \text{for } f(x) < -n. \end{cases}$$

Med μ betegnes Lebesguemålet på $\mathbb{R}$.

(i) Vis, at f_n er målelig; $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Antag nu, at

$$\sup_{n \ge 1} \int |f_n| d\mu < \infty, \qquad (*)$$

og vis, at så er f integrabel.

(iii) Undersøg, om man omvendt kan slutte, at $(*)$ gælder, såfremt f er integrabel.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (med hjælpemidler)

Lad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ betegne et målrum og lad $(A_n)_{n\geq 1}$ være en følge af målelige mængder for hvilken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Vis, at det for næsten alle x gælder, at x højst tilhører endelig mange af mængderne $A_1, A_2, \cdots$.

Vink. Se f.eks. på en funktion udtrykt ved hjælp af mængderne $A_n; n \geq 1$.

Opgave 4 (med hjælpemidler)

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ betegne mængden af (x, y) for hvilke $0 < x \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ og lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betegne funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos y}{y} & \text{for } (x,y) \in A \\ 0 & \text{for } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A. \end{cases}$$

(i) Bestem planintegralet $\int f(x,y)d(x,y)$.

(ii) Idet $F :]0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ betegner en differentiabel funktion med

$$F'(x) = \frac{\cos x}{x};\ x \in]0, \frac{\pi}{2}]$$

og $F(\frac{\pi}{2}) = 0$, skal man vise, at F er integrabel, og bestemme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)dx$.