# Matematik 3 MI (efterårspensum)

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Opgavesættet består af én stilopgave og tre opgaver og er på 2 sider.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af Stilopgaven.

## Stilopgave (uden hjælpemidler)

(i) Definér, hvad man forstår ved at $(X, \mathcal{B})$ er et Borelrum.

(ii) Lad $\mathcal{E}$ være en brolægning på mængden $X$. Vis, at der findes en mindste Borelstruktur på $X$, der indeholder $\mathcal{E}$.

(iii) Lad nu $(X_1, \mathcal{B}_1)$ og $(X_2, \mathcal{B}_2)$ være Borelrum og lad $\mathcal{E}_1$, henholdsvis $\mathcal{E}_2$ være frembringersystemer for henholdsvis $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ : $\sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}_1, \sigma(\mathcal{E}_2) = \mathcal{B}_2$. Antag, at $X_1 \in \mathcal{E}_1$ og at $X_2 \in \mathcal{E}_2$.

Definér *produkt Borelstrukturen* $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ og vis, at $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ er et frembringersystem for $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

(iv) Bevis sætningen om at produkt-målelige mængder har målelige sektioner (formulér først resultatet præcist).

## Opgave 1 (med hjælpemidler)

Lad $X$ være være en mængde. For en brolægning $\mathcal{A}$ på $X$ defineres en relation ("ækvivalens modulo $\mathcal{A}$") ved

$$x \equiv y \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{A}) \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A} : 1_A(x) = 1_A(y).$$

(i) Bevis, at ækvivalens modulo $\mathcal{A}$ er en ækvivalensrelation.

(ii) Lad $\mathcal{B}$ være en Borelstruktur på $X$, som er frembragt af brolægningen $\mathcal{E} : \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$. Bevis, at for punkter $x$ og $y$ i $X$ gælder, at $x \equiv y \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{B})$, hvis og kun hvis $x \equiv y \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{E})$.

(iii) Bevis, at en tælleligt frembragt og separerende Borelstruktur er tælleligt separerende.

## Opgave 2 (med hjælpemidler)

I denne opgave betegner $X$ enhedskvadratet i $\mathbb{R}^2$ : $X = [0,1] \times [0,1]$ udstyret med den naturlige Borelstruktur samt det to-dimensionale Lebesguemål. Med $f$ betegnes

 Opgave 2 fortsættes på side 2

**Københavns Universitet**
**Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1999**
**Matematik 3 MI (efterårspensum)**

funktionen, der er defineret på $X$ ved, for $(s,t) \in X$, at sætte

$$f(s,t) = \begin{cases} 0 \text{ hvis } s = t \text{ eller enten } s \text{ eller } t \text{ er } 0 \\ \dfrac{1}{t^2} \text{ hvis } 0 < s < t \\ -\dfrac{1}{s^2} \text{ hvis } 0 < t < s. \end{cases}$$

Undersøg, om $f$ er integrabel.

## Opgave 3 (med hjælpemidler)

Lad $\mu$ være et sandsynlighedsmål på Borelstrukturen $(X, \mathcal{B})$ og lad $f$ være en ikke-negativ integrabel funktion defineret på $X$. Betegn med $\varphi$ det ubestemte integral af $f$ m.h.t. $\mu$, dvs. $\varphi$ er målet givet ved

$$\varphi(A) = \int_A f d\mu\,; \quad A \in \mathcal{B}.$$

(i) Vis, at $\int \frac{1}{f} d\varphi \leq 1$. *Vejledning.* Vis først, at $\varphi(\{f = 0\}) = 0$ og udregn derefter $\int \frac{1}{f} \cdot 1_{\{f>0\}} d\varphi$.

(ii) Vis ved et eksempel, at integralet $\int \frac{1}{f} d\varphi$ kan være strengt mindre end 1. *Vejledning.* Man kan f.eks. lade $\mu$ være Lebesguemålet på $[0,1]$.