

Matematik 3 MI (forårspensum)

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Opgavesættet er på 3 sider og består af 9 opgaver.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af stilopgaven (Opgave 1). Opgave 1 vægtes med 90 point, og de øvrige opgaver (Opgave 2 – 9) vægtes med tilsammen 90 point.

Opgave 1 Stilopgave (90 point)

Formuler og bevis Fischer's fuldstændighedssætning

For at komme godt igang med beviset for Fischer's sætning, oplyses det, at man begynder med en følge $g_k \in \mathcal{L}_p$, hvorom det gælder, at $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty$. Undervejs i beviset får man brug for at kigge på funktionen

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|.$$

Man kan endvidere gratis benytte Sætning 7.10, som siger følgende:

Lad $f_n \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$, $n = 1, 2, \dots$, og lad f være en målelig funktion så $\lim_n f_n(x) = f(x)$ for μ -næsten alle $x \in X$. Hvis der findes $g \in \mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ med $\int g^p d\mu < \infty$, — (vi regner $\infty^p = \infty$) —, således at $|f_n| \leq g$ μ -n.o. for ethvert $n \in \mathbb{N}$, da er $f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ og

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

Et godt råd: Med til beviset for fuldstændighedssætningen hører Sætning 7.16, som udtaler sig om fuldstændighed og absolut konvergente rækker. Din besvarelse bør indeholde en formulering af denne sætning *men udskyd beviset for Sætning 7.16 til sidst.*

Opgave 2 (5 point)

Giv tre forskellige eksempler på σ -algebraer på den reelle akse \mathbb{R} .

Opgave 3 (15 point)

Sæt

$$F(t) = \int_0^1 \sin(x^2 + t^2) dx, \quad t \in [-10, 10].$$

Gør rede for, at F er kontinuert og differentiabel, og at

$$F'(t) = \int_0^1 2t \cos(x^2 + t^2) dx.$$

Opgave 4 (10 point)

Gør omhyggeligt rede for, at

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \sin(\sqrt{xy+x}) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \sin(\sqrt{xy+x}) dy \right) dx.$$

Opgave 5 (10 point)

Bestem

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1/2)^n 1_{[n, n+1]} dm.$$

Der skal argumenteres omhyggeligt.

Opgave 6 (15 point)

Betragt det målbare rum $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. Lad μ være tællemålet på $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$, og lad ε_n være Diracmålet i n på $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. Gør rede for, at $\mu + \varepsilon_2 + \varepsilon_4$ er et mål på $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}))$. Bestem

$$\int_{\mathbb{N}} f d(\mu + \varepsilon_2 + \varepsilon_4),$$

hvor $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ er givet ved $f(n) = 2^{-n}$.

Opgave 7 (10 point)

Betragt målrummet $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), m)$. Sæt $f_n = n^2 1_{[n, n+n^{-5}]}$.

- (i) Gør rede for, at $f_n \rightarrow 0$ punktvis overalt.
- (ii) For hvilke p , $1 \leq p < \infty$, gælder $f_n \rightarrow 0$ i p -middel?

Opgave 8 (10 point)

Gør omhyggeligt rede for, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} \cos(\sqrt{x^2 + n^2}) dx = 0.$$

Opgave 9 (15 point)

Betragt delmængden E af \mathbb{R}^2 givet ved

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}.$$

- (i) Gør rede for, at E er en Borelmængde.
- (ii) Bestem snittet E_x for alle x i \mathbb{R} .
- (iii) Idet m som sædvanligt angiver Lebesguemålet på \mathbb{R} og $\varepsilon_{1/2}$ er Diracmålet i $1/2$, ønskes $(\varepsilon_{1/2} \otimes m)(E)$ bestemt.