Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998-1999

Matematik 3 MI, efterårspensum

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Opgavesættet er på 3 sider og består af 2 opgaver.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af stilopgaven.

Stilopgave (uden hjælpemidler). Nedenfor findes to forslag til stilopgave. Udvælg ét af dem og aflevér en besvarelse af den valgte opgave. (Hvis der – mod hensigten – afleveres en besvarelse af begge mulige opgaver, vil der alligevel kun blive taget hensyn til den først behandlede).

Mulighed A. Formulér og bevis hovedsætningen om eksistens og entydighed af integralet af ikke-negative funktioner.

Mulighed B. Lad $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ være Borelrum. Hvad forstås ved at en afbildning $f : X \to Y$ er målelig?

Bevis, at hvis $\mathcal{B}_0$ er et frembringersystem for $\mathcal{B}$ og $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ for alle $B \in \mathcal{B}_0$, så er f målelig.

Udvælg passende følgesætninger (korollarer) til dette resultat, der alle hjælper én til at afgøre, om forelagte afbildninger er målelige.

Opgave* (med hjælpemidler).

Lad $(X, \mathcal{B})$ være et Borelrum og lad φ og μ være sandsynlighedsmål hørende til dette.

(i) Gør rede for, hvad det vil sige, at φ har tæthed m.h.t. μ, (ækvivalent, at φ er et ubestemt integral m.h.t. μ).

I det følgende antages, at φ har tæthed m.h.t. μ og vi bruger f til at betegne tæthedsfunktionen: $f = \frac{d\varphi}{d\mu}$.

(ii) Vis, at såfremt $B \in \mathcal{B}$ er en μ-nulmængde, så er B også en φ-nulmængde.

(iii) Vis, at $f > 0$ n.o. $[\varphi]$ (dvs., at f er positiv næsten overalt m.h.t. målet φ), og at $f < \infty$ n.o. $[\mu]$.

(iv) Vis, at $\int \frac{1}{f} d\varphi = 1$.

(v) Bevis, at integralet

$$\int (\log f) d\varphi = \int (\log \frac{d\varphi}{d\mu}) d\varphi$$

*Opgaven indeholder mange delspørgsmål. Ved besvarelsen af ét delspørgsmål kan man uden videre udnytte resultaterne formuleret i tidligere spørgsmål.

Opgavesættet fortsættes på side 2

har en veldefineret værdi i intervallet $]-\infty,\infty]$.** *Vejledning:* Lad

$$\log f = (\log f)^+ - (\log f)^-$$

være fremstillingen af $\log f$ v.hj. af funktionens positiv- og negativdel. Udnyt vurderingen $\log x \le x-1 \le x$ i forbindelse med omskrivningen

$$\int (\log f)^- d\varphi = \int_{\{f<1\}} \log \frac{1}{f} d\varphi$$

til at slutte det ønskede.

(vi) Bevis følgende skærpelse af resultatet under (v):

$$0 \le \int (\log f) d\varphi \le \infty.$$

Vejledning: Udnyt, at

$$\int (\log \frac{1}{f}) d\varphi \le \int (\frac{1}{f} - 1) d\varphi$$

(vii) Vis, at for en vilkårlig følge $(\delta_n)_{n\ge1}$ af positive tal med $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ vil

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\delta_n} \int \log(1+\delta_n f) d\mu \to 1.$$

Vejledning: Udnyt Lebesgue's sætning om domineret konvergens. Bemærk iøvrigt, at dette spørgsmål vedrører integration m.h.t. målet μ.

(viii) Vis, at såfremt $\int (\log f) d\varphi < \infty$, så gælder for enhver følge $(\delta_n)_{n\ge1}$ af positive tal med $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, at

$$\lim_{n\to\infty} \int \log(1+\delta_n f) d\varphi \to 0.$$

Vejledning: Antag f.eks., at $\delta_n \le 1$ for alle n og udnyt, at $\log(1+x) \le 2\log x$ for x tilstrækkelig stor.

Informationsafstanden mellem φ og μ er per definition størrelsen

$$D(\varphi\|\mu) = \int (\log f) d\varphi.$$

Informationsafstanden $D(\psi\|\mu)$ defineres generelt for ethvert sandsynlighedsmål ψ, der har tæthed m.h.t. μ, ved

$$D(\psi\|\mu) = \int (\log \frac{d\psi}{d\mu}) d\psi.$$

**Her og i det følgende betegner "log" naturlige logaritmer.

Opgavesættet fortsættes på side 3

For at undgå misforståelser pointeres, at $D(\cdot\|\cdot)$ *ikke* er et sædvanligt afstandsmål (en metrik), f.eks. er $D(\cdot\|\cdot)$ ikke symmetrisk.

Udover målene φ og μ betragtes nu en skare $(\varphi_\delta)_{\delta>0}$ af mål, givet ved

$$\varphi_\delta = \frac{\delta}{1+\delta}\varphi + \frac{1}{1+\delta}\mu\,; \quad \delta > 0.$$

(ix) Bevis, at målene φ_δ er sandsynlighedsmål og at

$$\frac{d\varphi_\delta}{d\mu} = \frac{1}{1+\delta}(1+\delta f).$$

(x) Vis, at såfremt $D(\varphi\|\mu) < \infty$, så vil det for enhver følge $(\delta_n)_{n\geq 1}$ af positive tal med $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ gælde, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\delta_n}{\delta_n} D(\varphi_{\delta_n}\|\mu) = 0.$$