3MI-eksamen — Forårspensum — 23. maj 2000

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Opgavesættet er på 2 sider og består af 7 opgaver.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter er med alle sædvanlige hjælpemidler. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af stilopgaven (Opgave 1). Opgave 1 vægtes med 90 point, og de øvrige opgaver (Opgave 2 – 7) vægtes med tilsammen 90 point.

Opgave 1 — stilopgave (90 point)

Hölder og Minkowski's uligheder.

Din besvarelse skal indeholde:

- En defintion af begrebet *duale eksponenter*,
- En formulering af Hölder's ulighed og af Minkowski's ulighed,
- Et bevis for begge ulighederne i punktet ovenfor!

For at komme godt igang med opgaven oplyses det, at et skridt på vejen til beviset for Hölder's ulighed består i at vise *Younge's ulighed*:

$$uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}, \qquad u, v \in [0, \infty[,$$

når p og q er duale eksponenter. (En del af din opgave er at vise Younge's ulighed — du får altså *ikke* beviset for denne ulighed foræret!)

Opgave 2 (10 point) Bestem

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{1+x^2/n})}{1+x^2} dx.$$

Du skal argumentere omhyggeligt for hvert skridt.

Opgave 3 (10 point) Lad G være en åben ikke-tom delmængde af planen $\mathbb{R}^2$, og lad som sædvanligt m_2 være Lebesguemålet på $\mathbb{R}^2$. Vis at $m_2(G) > 0$. [Vink: Benyt f.eks. Sætning 1.3.]

Opgave 4 (15 point) For hver Borel mængde E i $\mathbb{R}$, sæt

$$\mu(E) = \int_E t^2 dm(t),$$

hvor m som sædvanligt er Lebesguemålet på $\mathbb{R}$.

(i) Gør rede for (f.eks. ved henvisning til relevant sted i noterne), at μ er et mål på $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$.

(ii) Bestem $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$, hvor $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } -5 \leq x < 0, \\ 2, & \text{hvis } 0 \leq x \leq 7, \\ 0, & \text{hvis } x < -5 \text{ eller hvis } x > 7. \end{cases}$$

Opgave 5 (15 point) Lad C være enhedscirklen i $\mathbb{R}^2$ givet ved

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Vis at $m_2(C) = 0$, hvor m_2 er det sædvanlige Lebesguemål på $\mathbb{R}^2$. [Vink: Benyt f.eks. Korollar 6.8.]

Opgave 6 (25 point) Betragt målrummet $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), m)$.

(i) Vis at $|\cos(x)|^n \to 0$ m-n.o. for $n \to \infty$.

(ii) Sæt $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [-\pi/4, \pi/4] + n\pi$. Vis at $m(A) = \infty$. Det oplyses (og skal ikke vises), at $|\cos(x)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} 1_A$.

(iii) Er det sandt, at

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\cos(x)|^n dx = 0?$$

Dit svar skal begrundes. [Vink: Benyt f.eks. spørgsmål (ii).]

Opgave 7 (15 point) Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum. Antag $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ er følger i $\mathcal{L}_2(\mu)$, at $f, g \in \mathcal{L}_2(\mu)$, og at $f_n \to f$ og $g_n \to g$ i 2-middel. Vis at $f_n g_n \to fg$ i 1-middel.