Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 2000-2001

Matematik 3 RE

Opgave til besvarelse i 3 timer.
Sættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.
Alle skriftlige hjælpemidler er tilladt.
I opgave 1 kan man godt benytte et resultat fra et tidligere spørgsmål uden at dette er besvaret.

Opgave 1 (65 %)

Lad G være en gruppe af orden 16 og antag, at G er frembragt af elementerne x, y og z.

Antag endvidere, at $\operatorname{ord}(x) = 4$ og $\operatorname{ord}(y) = \operatorname{ord}(z) = 2$.

Endelig er der givet en 2-dimensional matrixrepræsentation T ved

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad T(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi lader χ betegne T's karakter.

1) Vis, at T er en irreducibel repræsentation.
2) Bestem $\chi(x^i)$, $0 \le i \le 3$, $\chi(x^2y)$ og $\chi(x^2yz)$.
3) Hvis det betegner determinanten af en (2×2)-matrix bedes man gøre rede for, at $\det \circ T$ er en 1-dimensional repræsentation S af G.

Om gruppen G vides endvidere, at G' er cyklisk af orden 2 frembragt af x^2.

4) Vis, at G har netop 8 forskellige 1-dimensionale karakterer og 2 forskellige 2-dimensionale irreducible karakterer.

Med $\overline{g}$ betegnes g's sideklasse i G/G'.

5) Gør rede for, at $\overline{x}$, $\overline{y}$ og $\overline{z}$ frembringer G/G', at $|G/G'| = 8$ og at $G/G' \simeq C_2 \times C_2 \times C_2$. (Her betegner C_2 den cykliske gruppe af orden 2).
6) Angiv samtlige 8 1-dimensionale karakterers værdi på x^2 og x^2yz.
7) Vis, at $x^iy^jz^k$, $0 \le i, j, k \le 1$ er repræsentanter for 8 forskellige konjugationsklasser i G.

   Vis endvidere, at der er 10 konjugationsklasser i alt, og at x^2 og x^2yz kan bruges som repræsentanter for de sidste 2. (**Vink**: Udnyt og vis, at x^2 tilhører centret for G).
8) Angiv for de 2 2-dimensionale karakterer værdierne på yz og x^2yz. Vis, at yz er central og at $yz = zy$.
9) Vis, at $yx = x^3y$ og at $zx = x^3z$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 2000-2001
Matematik 3 RE

Opgave 2 (30 %)

Lad T være en 4-dimensional matrixrepræsentation af SU(2) givet ved

$$T(A) = \begin{bmatrix} \dfrac{A+I}{2} & \dfrac{A-I}{2} \\ \dfrac{A-I}{2} & \dfrac{A+I}{2} \end{bmatrix},$$

I betegner her 2×2-identitetsmatricen.

(Man behøver ikke godtgøre, at T er en repræsentation af SU(2)).

Lad χ betegne karakteren for T.

1) Gør rede for, at $T(\mathrm{SU}(2))$ er en kompakt, sammenhængende undergruppe af $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$.
2) Udregn $\chi(B)$ hvor B er matricen $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Udregn også for alle θ i $\mathbb{R}$ karakteren $\chi(C_\theta)$, hvor $C_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.
3) Lad χ_4 betegne karakteren af den 4-dimensionale irreducible repræsentation af SU(2). Angiv $\chi_4(B)$ og $\chi_4(C_\theta)$.
4) Undersøg om χ er irreducibel og i benægtende fald ønskes χ skrevet som en sum af irreducible karakterer.

Opgave 3 (5 %)

Vis, at hvis en gruppe G med orden 20 ($|G| = 20$) har en 4-dimensional irreducibel repræsentation T, da er T tro,