Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 2000

Matematik 3 MI (efterårspensum)

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Opgavesættet er på 2 sider og består af én stilopgave og fire opgaver.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af Stilopgaven.

Stilopgave (uden hjælpemidler)

Lad $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ og $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ være σ-endelige målrum. Bevis, at der findes et entydigt bestemt produktmål μ af μ_1 og μ_2 defineret på produkt σ-algebraen $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

Opgave 1 (med hjælpemidler)

Lad $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ være en kontinuert strengt voksende funktion af $[0,1]$ på $[0,1]$ (således må $\varphi(0) = 0$ og $\varphi(1) = 1$) og lad som sædvanlig φ^{-1} betegne den omvendte (inverse) funktion. Lad μ betegne Lebesguemålet på $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ og lad η betegne billedmålet af μ under afbildningen φ, ligeledes defineret på Borelstrukturen $([0,1], \mathcal{B}([0,1))$. Beregn følgende integral

$$\int \varphi^{-1} d\eta.$$

Opgave 2 (med hjælpemidler)

Antag, at målet $\varphi = (X, \mathcal{B}, \varphi)$ har tætheden f m.h.t. målet $\mu = (X, \mathcal{B}, \mu)$. Lad A betegne mængden

$$A = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$$

og lad η betegne restriktionen af μ til A.

Bevis, at η har tæthed m.h.t. φ og bestem en tilhørende tæthedsfunktion.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (med hjælpemidler)

Bestem

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{1+x^2/n}\,)}{1+x^2}\, dx.$$

Du skal argumentere omhyggeligt for hvert skridt.

Opgave 4 (med hjælpemidler)

For hver Borelmængde E i $\mathbb{R}$ sættes

$$\mu(E) = \int_E t^2 dt$$

(hvor $\int \cdots dt$ som sædvanlig betyder integration m.h.t. Lebesguemålet).

(i) Gør rede for at μ er et mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(ii) Bestem $\int f d\mu$, hvor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis} \quad -5 \le x < 0, \\ 2 & \text{hvis} \quad 0 \le x \le 7, \\ 0 & \text{hvis} \quad x < -5, \ \text{ eller hvis } \ x > 7. \end{cases}$$