Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1996

Opgavesæt til besvarelse i løbet af $1\frac{1}{2}$ dag.
Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne notater o.l. er tilladt). Skulle der blive behov for det, kan eksaminator indkalde en eksaminand til opklarende spørgsmål.
Opgavesættet udleveres tirsdag den 28. maj fra kl. 8.30 på Matematisk Instituts kontor, og besvarelsen afleveres sammesteds senest onsdag den 29. maj kl. 16.00, forsynet med eksaminandens underskrift, adresse og eventuelle telefonnummer.
Det er ikke nødvendigt at gentage hele opgaveteksten i besvarelsen.

Matematik 3 MA

Opgave 1

Man betragter den partielle differentialoperator i to variable

$$A = D_1^4 + D_2^4 + bD_1^2 D_2^2,$$

hvor b er en kompleks konstant.

1° Vis, at A er elliptisk hvis og kun hvis $b \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -2]$. (Undersøg evt. tilfældene $b \in \mathbb{R}$ og $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ hver for sig.)

2° Gør rede for (ved henvisning til de relevante sætninger), at den maksimale og den minimale realisation af A på $\mathbb{R}^2$ er sammenfaldende, og at de i de elliptiske tilfælde har definitionsmængde $H^4(\mathbb{R}^2)$.

3° Vis, at $A_{\max}$ kan defineres ved Lax-Milgram sætningen ud fra en sesquilineær form $a(u, v)$ på et passende underrum V af $H = L_2(\mathbb{R}^2)$ (angiv a og V).

Giv en afgrænsning af den numeriske værdimængde og spektret for $A_{\max}$, dels når $b \in]-2, \infty[$, dels når $b = \alpha + i\beta$ med $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

Opgave 2

I det følgende betegner $\varphi(x)$ en given funktion i $L_2(\mathbb{R})$ med kompakt støtte.

1° Vis, at $\hat{\varphi} \in H^m(\mathbb{R})$ for alle $m \in \mathbb{N}$, samt at $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R})$.

2° Vis, at når $\psi(\xi) \in L_1(\mathbb{R})$, så konvergerer $\sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi(\xi + 2\pi l)$ mod en funktion i $L_1(\mathbb{T})$, og

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(\xi)\, d\xi = \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi(\xi + 2\pi l)\, d\xi.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

(Vi minder om, at $L_p(\mathbb{T})$ $(1 \le p < \infty)$ betegner rummet af (ækvivalensklasser af) funktioner $\psi(\xi)$ i $L_{p,\text{loc}}(\mathbb{R})$ med periode 2π; med normen $\big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\psi(\xi)|^p \, d\xi\big)^{1/p}$ er det et Banach rum.)

Vis, at rækken $\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat\varphi(\xi + 2\pi l)|^2$ konvergerer uniformt mod en kontinuert funktion $g(\xi)$ med periode 2π.
(*Vink.* Ved hjælp af en ulighed fra Kapitel 7 i Mat 3MA noterne kan man vise, at $\sup_{\xi\in[2\pi l, 2\pi(l+1)]} |\hat\varphi(\xi)|^2 \le c\|\hat\varphi|_{[2\pi l,2\pi(l+1)]}\|^2_{H^1([2\pi l,2\pi(l+1)])}$.)

3° Vis identiteterne, for $n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x-n)\overline{\varphi(x)}\, dx = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat\varphi(\xi)|^2 e^{-in\xi}\, d\xi = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat\varphi(\xi+2\pi l)|^2 e^{-in\xi}\, d\xi.$$

4° Vis, at følgende udsagn (a) og (b) er ækvivalente:

(a) Systemet af funktioner $\{\, \varphi(x-n) \mid n \in \mathbb{Z}\,\}$ er et ortonormalsystem i $L_2(\mathbb{R})$.
(b) Funktionen $g(\xi)$ defineret i 2° er lig med 1.

(*Vink.* Betragt Fourierrækken for g.)

Opgave 3

1° For hvert $j \in \mathbb{N}$ defineres distributionen u_j ved

$$u_j = \sum_{k=1}^{2^j-1} \tfrac{1}{2^j}\delta_{\frac{k}{2^j}}.$$

Vis, at $u_j \in \mathcal{D}'(\,]0,1[\,)$, og at $u_j \to 1$ i $\mathcal{D}'(\,]0,1[\,)$ for $j \to \infty$.

2° Man betragter $\mathbb{R}^2$ med koordinater (x,y) og betegner $(x^2+y^2)^{1/2} = r$. Lad $v_1(x,y) = \log r$ og $v_2(x,y) = \partial_x \log r$ for $(x,y) \ne (0,0)$ og sæt funktionerne lig med 0 for $(x,y) = (0,0)$; vis, at begge funktioner tilhører $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Idet $\log r$ som element af $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ identificeres med v_1, skal man vise at den afledte i distributionsforstand $\partial_x \log r$ identificeres med funktionen v_2, samt at begge distributioner har orden 0.