Matematik 3 MA

Opgavesæt til besvarelse i løbet af 2 dage.
Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne notater o.l. er tilladt).
Opgavesættet udleveres onsdag den 21. juni fra kl. 8.30 på Matematisk Instituts kontor, og besvarelsen afleveres sammesteds senest torsdag den 22. juni kl. 16.00, forsynet med eksaminandens underskrift, adresse og eventuelle telefonnummer.
Det er ikke nødvendigt at gentage hele opgaveteksten i besvarelsen.

Opgave 1

Lad $Q =]0,1[\times]0,1[\subset\mathbb{R}^2$, og betragt den sesquilineære form

$$a(u,v) = \int_Q (\partial_1 u\partial_1\bar{v} + \partial_2 u\partial_2\bar{v} + u\partial_1\bar{v})\,dx_1 dx_2.$$

Lad $H = L_2(Q)$, $V_0 = H_0^1(Q)$ og $V_1 = H^1(Q)$, og lad a_0 henholdsvis a_1 betegne a defineret på V_0 henholdsvis V_1. Man betragter triplerne (H, V_0, a_0) og (H, V_1, a_1). 1° Vis, at a_0 er V_0-elliptisk og at a_1 er V_1-coerciv, og gør rede for, at Lax-Milgrams sætning kan anvendes på triplerne (H, V_0, a_0) og (H, V_1, a_1). De derved definerede operatorer betegnes A_0 og A_1. (*Vink.* Man kan vise, at $(u, \partial_1 u)_H$ er rent imaginær, når $u\in C_0^\infty(Q)$.)

2° Vis, at A_0 virker som $-\Delta-\partial_1$ i distributionsforstand, og at der for $u\in D(A_0)\cap C(\overline{Q})$ gælder, at $u|_{\partial Q} = 0$.
(*Vink.* Lad $u_k\to u$ i $H_0^1(Q)$, $u_k\in C_0^\infty(Q)$. For et randpunkt x, der ikke er et hjørne, kan man ved passende valg af beskæringsfunktion skære u_k'erne og u ned til en lille kugle-omegn $B_{x,\delta}\cap\overline{Q}$ og vise, at u er 0 som L_2-funktion på intervallet $B_{x,\delta/2}\cap\partial Q$, ved uligheder som i Sætning 7.18.) 3° Vis, at A_1 virker som $-\Delta-\partial_1$ i distributionsforstand, og at der for $u\in D(A_1)\cap C^2(\overline{Q})$ gælder, at u opfylder visse første ordens randbetingelser på kanterne af Q (de ønskes bestemt). (Bemærk, at Gauss' og Green's formler gælder for Q, med stykkevis kontinuert definition af normalvektoren ved randen.)

4° Vis, at A_0 har sin numeriske værdimængde (og dermed sit spektrum) indeholdt i området

$$\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Re}\lambda\geq 2,\quad |\operatorname{Im}\lambda|\leq\sqrt{\operatorname{Re}\lambda}\}.$$

(*Vink.* Bemærk, at for $u\in V_0$ med $\|u\|_H = 1$ er $|\operatorname{Im} a_0(u,u)|\leq\|D_1 u\|_H$, mens $\operatorname{Re} a_0(u,u)\geq\|D_1 u\|_H^2$.) 5° Undersøg beliggenheden af numerisk værdimængde (og spektrum) for A_1. (Man bør i det mindste finde frem til en konveks mængde som i noternes Korollar 2.17. Man kan eventuelt forbedre dette til, at mængden kan erstattes med

$$\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Re}\lambda\geq -\tfrac{1}{2},\quad |\operatorname{Im}\lambda|\leq\sqrt{2\operatorname{Re}\lambda+1}\}.)$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2

Lad $\mathcal{L}$ betegne differentialoperatoren defineret ved

$$\mathcal{L}u = -\partial_x(x\partial_x u) + (x+1)u = (1+\partial_x)[x(1-\partial_x)u],$$

for $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. 1° Find den operator $\widehat{\mathcal{L}}$, som $\mathcal{L}$ føres over i ved Fourier transformation, altså $\widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{F}$. 2° Vis, at funktionerne

$$g_k(\xi) = \frac{(1-i\xi)^k}{(1+i\xi)^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

opfylder

$$\widehat{\mathcal{L}} g_k = 2(k+1) g_k$$

(altså er egenfunktioner for $\widehat{\mathcal{L}}$ med tilhørende egenværdier $2(k+1)$), samt at $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ er et ortonormalsystem i $L_2(\mathbb{R})$.
3° Vis, at $H(x)e^{-x}$ ved foldning med sig selv m gange giver

$$H(x)e^{-x} * \cdots * H(x)e^{-x} = \frac{x^m}{m!} H(x)e^{-x} \quad (m+1 \text{ faktorer}).$$

4° Vis, at $\mathcal{L}$ har et system af egenfunktioner

$$f_k(x) = \mathcal{F}^{-1} g_k = p_k(x) H(x) e^{-x}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

hørende til egenværdier $2(k+1)$, hvor hvert p_k er et polynomium af grad k. Beregn p_k for $k = 0,1,2$. (*Vink.* Man kan for eksempel beregne $\mathcal{F}^{-1}\frac{1}{1+i\xi}$ og udnytte pkt. 3°.) 5° Vis, at yderligere egenfunktioner for $\mathcal{L}$ (med egenværdier $2(-m+1)$) fås ved at tage

$$f_{-m}(x) = f_{m-1}(-x), \quad m \in \mathbb{N},$$

samt at hele systemet $\{\sqrt{2}\, f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ udgør et ortonormalsystem i $L_2(\mathbb{R})$. 6° Vis, at når $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, er

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} |(f_k,\varphi)_{L_2}| \le C \|\mathcal{L}\varphi\|_{L_2},$$

for en passende konstant C. (*Vink.* En hjælpende ulighed fås ved at anvende Bessels ulighed på $\mathcal{L}\varphi$ og bemærke, at $(f_k, \mathcal{L}\varphi) = (\mathcal{L} f_k, \varphi)$.) 7° Vis, at $\Lambda = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} f_k$ definerer en distribution i $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ved forskriften

$$\langle \Lambda, \varphi \rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \langle f_k, \varphi \rangle,$$

og at denne har støtte i $[0,\infty[$.[Til almindelig oplysning for læseren nævnes, at systemet $\{\sqrt{2} f_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ på $\mathbb{R}_+$ er er en variant af det der sædvanligvis kaldes Laguerre ortonormalsystemet, og at det er fuldstændigt i $L_2(\mathbb{R}_+)$.]

Opgave 3

For $a \in \mathbb{R}_+$ sættes

$$f_a(x) = \frac{a}{\pi} \frac{1}{x^2+a^2} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}.$$

Opgave 3 fortsættes på side 3

Vis, at $f_a \to \delta$ i $H^{-1}(\mathbb{R})$ for $a \to 0+$.