Matematik 3 MA

Opgavesæt til besvarelse i løbet af 2 dage.
Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).
Opgavesættet udleveres den 22. juni fra kl. 9 på Matematisk Instituts kontor, og besvarelsen afleveres sammesteds senest den 23. juni kl. 16, dateret og underskrevet af eksaminanden.
Det er ikke nødvendigt at gentage hele opgaveteksten i besvarelsen.

Opgave 1

Lad – som sædvanlig – χ betegne en funktion i $C_0^\infty(\mathbb{R})$ med egenskaberne:

$$\begin{aligned} &0 \le \chi \le 1 \\ &\chi(x) = 0 \text{ for } x \notin]-2,2[\\ &\chi(x) = 1 \text{ for } x \in [-1,1]\,. \end{aligned}$$

Definer

$$\kappa_n(x) = \begin{cases} \chi(nx-3) & , \quad x < \frac{4}{n} \\ 1 & , \quad \frac{3}{n} < x < 6 \\ \chi(x-6) & , \quad 5 < x \end{cases}$$

for $n = 1, 2, 3, \cdots$.

1° Gør rede for, at κ_n er en veldefineret funktion i $C_0^\infty(\mathbb{R})$ for hvert n i $\mathbb{N}$. Vis, at funktionsfølgen $(e^{-n}\kappa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer mod 0 i $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

2° Vis, at der ikke findes nogen distribution u på $\mathbb{R}$ med den egenskab, at restriktionen af u til $]0,\infty[$ er distributionen givet ved den lokalt integrable funktion $x \mapsto e^{\frac{6}{x}}$ på $]0,\infty[$.

Opgave 2

Lad $n \in \mathbb{N}$ være givet. For en vilkårlig funktion φ på $\mathbb{R}^n$ defineres $\check{\varphi} = S\varphi$ ved $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. For u i $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ defineres $\check{u}$ ved $\check{u}(\varphi) = u(\check{\varphi})$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. For $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ og $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sættes $u * \varphi = \varphi * u$. Tilsvarende sættes $u * \varphi = \varphi * u$ for $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ og u i $S'(\mathbb{R}^n)$. For f i $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ betegnes den tilsvarende distribution på $\mathbb{R}^n$ ved Λ_f eller f.

1° Gør rede for, at $(\partial^\alpha \Lambda_f)^\vee = (-\partial)^\alpha \Lambda_{\check{f}}$ for f kontinuert på $\mathbb{R}^n$ og $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. Vis, at for u i $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ er $\check{u}$ i $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ med støtte $\operatorname{supp}(\check{u}) = -\operatorname{supp}(u)$.

2° Gør rede for, at for f kontinuert med kompakt støtte på $\mathbb{R}^n$ og α i $(\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ og φ i $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ er distributionen $\varphi * \partial^\alpha \Lambda_f$ givet ved funktionen $(\partial^\alpha \varphi) * f$ i $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Vis, at for u i $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ og φ i $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ er $\varphi * u$ givet ved en funktion, som vi også vil betegne $\varphi * u = u * \varphi$; vis, at $\varphi \mapsto \varphi * u$ definerer en kontinuert afbildning af $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ind i $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Opgave 2 fortsættes på side 2

3° Vis, at for φ i $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ og v i $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ er $(\varphi * v)(\psi) = v(\psi * (\Lambda_\varphi)^\vee)$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Vis, at for $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ og φ i $S(\mathbb{R}^n)$ er $\varphi * u(\psi) = \Lambda_\varphi(\psi * \check{u})$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

4° Vis, at for $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ og v i $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ defineres ved $(u * v)(\psi) = v(\psi * \check{u})$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, en distribution $u * v$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, foldningen af u og v, og at $v \mapsto u * v$ definerer en kontinuert lineær afbildning af $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ind i $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

5° Vis, at for u i $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, v i $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ og α i $(\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ er $\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v)$.

6° Antag i dette spørgsmål, at $n = 1$. Find for j i $\mathbb{N} \cup \{0\}$ foldningen af den j'te afledede af distributionen $\delta : \varphi \mapsto \varphi(0)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, og distributionen svarende til Heaviside funktionen $H = 1_{]0,\infty[}$.

7° Vis, at for u og v i $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ er $u * v$ i $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ med $\operatorname{supp}(u * v) \subseteq \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(v)$, og at Fourier transformering fører foldning i produkt: $F(u * v) = F(u)F(v)$. (Det må her gerne benyttes, at for u i $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ er Fu givet ved en funktion, som vi også betegner Fu, i $C^\infty(\mathbb{R}^n)$).

8° Vis, at for u og v i $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ og w i $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ er $(u * v) * w = u * (v * w)$, og at $\delta * w = w$.

9° Lad $P(D)$ betegne en partiel differential operator med konstante koefficienter på $\mathbb{R}^n$. Antag, at distributionen v på $\mathbb{R}^n$ er en fundamentalløsning, det vil sige, at $P(D)(v) = \delta$. Vis, at hvis f er en distribution på $\mathbb{R}^n$, og hvis f – eller v – har kompakt støtte, så er distributionen $f * v$ – eller $v * f$ – en løsning u til ligningen $P(D)u = f$.

Opgave 3

Lad Ω betegne $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Betragt differentialoperatoren A på Ω givet ved
$A\varphi = -(1 + \cos^2 x)\varphi''_{x,x} - (1 + \sin^2 x + i\cos^2 y)\varphi''_{y,y} + (2\cos x \sin x)\varphi'_x + (i2\cos y \sin y)\varphi'_y + \varphi$,
$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

1° Vis, at $H^2(\Omega)$ er indeholdt i definitionsområdet for den maksimale afsluttede realisation A_{max} af A på $L_2(\Omega)$, og at $H_0^2(\Omega)$ er indeholdt i definitionsområdet for den minimale afsluttede realisation $A_{\min}$ af A på $L_2(\Omega)$.

2° Vis, at sesquilinearformen

$$(\varphi, \psi) \mapsto (A\varphi, \psi)\,,\ \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

har en og kun én udvidelse til en begrænset sesquilinearform på $H_0^1(\Omega)$, og at denne form er $H_0^1(\Omega)$-coerciv.

3° Vis, at $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ er indeholdt i definitionsområdet for den tilsvarende Lax-Milgram operator $\tilde{A}$.

4° Vis, at for (a,b) i $\mathbb{R}^2$, der opfylder $|b| > 3a$, er $\tilde{A} - a - ib$ en bijektiv afbildning af definitionsområdet for $\tilde{A}$ på $L_2(\Omega)$ med begrænset invers afbildning.