**Københavns Universitet**
**Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1991**

# Matematik 3 MA

Opgavesæt til besvarelse i løbet af $2\frac{1}{2}$ dag.

Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).

Opgavesættet udleveres den 19. juni fra kl. 9.00 på Matematisk Instituts kontor, og besvarelsen afleveres sammesteds senest den 21. juni kl. 16.00, dateret og underskrevet af eksaminanden.

Det er ikke nødvendigt at gentage hele opgaveteksten i besvarelsen.

## Opgave 1

Lad $n \in \mathbb{N}$ og en åben, ikke-tom delmængde $\Omega$ af $\mathbb{R}^n$ være givne.

Lad $\mathcal{D}_e{}'(\Omega)$ betegne mængden af distributionen af endelig orden på $\Omega$.

1° Vis, at for $\beta$ i $(\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ og $\Lambda$ i $\mathcal{D}_e{}'(\Omega)$ er $\partial^\beta \Lambda$ i $\mathcal{D}_e{}'(\Omega)$.

2° Vis, at for $f$ i $C^\infty(\Omega)$ og $\Lambda$ i $\mathcal{D}_e{}'(\Omega)$ er $f\Lambda$ i $\mathcal{D}_e{}'(\Omega)$.

3° Vis, at enhver tempereret distribution på $\mathbb{R}^n$ er af endelig orden.

4° Giv et eksempel på en distribution i $\mathcal{D}_e{}'(\mathbb{R})$, der ikke er tempereret.

5° Vis, at når $\varphi$ tilhører $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ og $\Lambda$ er en distribution på $\mathbb{R}^n$, så er $\varphi * \Lambda$ en distribution af orden 0 på $\mathbb{R}^n$.

## Opgave 2

Lad $b$ betegne funktionen givet ved $b(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in [0,2]$.

Lad $A_0$ betegne operatoren på $H = L^2([0,2])$ med definitionsområde $D(A_0) = \{f \in C^2([0,2]) \mid f(0) - 2f'(0) - f'(2) = 0,\ f(2) + e^2 f'(0) + 5f'(2) = 0\}$ og givet ved at $A_0 f = -bf'' + xbf' + f$ for $f$ i $D(A_0)$.

Lad $V$ betegne underrummet af $\mathbb{C}^4$ udspændt af vektorerne

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -e^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Opgave 2 fortsættes på side 2

1° Vis, at

$$D(A_0) = \left\{ f \in C^2([0,2]) \mid \begin{pmatrix} f(0) \\ f(2) \\ f'(0) \\ f'(2) \end{pmatrix} \in V \right\} .$$

2° Vis, at $A_0$ har en udvidelse til en selvadjungeret operator $A$ på $H$.

## Opgave 3

1° Vis, at ved

$$Pf\left(\frac{1}{|x|}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx + 2\varphi(0)\log\varepsilon \right], \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) ,$$

defineres en distribution $Pf(\frac{1}{|x|})$ på $\mathbb{R}$.

2° Gør rede for, at $Pf(\frac{1}{|x|})$ er en tempereret distribution af orden $\leqq 1$.

3° Vis, at restriktionen af $Pf(\frac{1}{|x|})$ til $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er en distribution givet ved en lokalt integrabel funktion på $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4° Find distributionen $xPf(\frac{1}{|x|})$ på $\mathbb{R}$.

5° Vis, at der findes en konstant $c$, sådan at den Fouriertransformerede af $Pf(\frac{1}{|x|})$ er distributionen givet ved den lokalt integrable funktion $c - 2\log|\xi|$ på $\mathbb{R}$. (Forsøg ikke at finde $c$, det er ikke så let!).

## Opgave 4

I denne opgave betragtes Laplace operatoren $\Delta = {\partial_1}^2 + {\partial_2}^2$ på $\mathbb{R}^2$.

1° Vis, at $H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ er indeholdt i $C^0(\mathbb{R}^2)$.

2° Lad $u$ være en distribution på $\mathbb{R}^2$.

Antag, at der findes en kontinuert funktion $h$ på $\mathbb{R}^2$, sådan at $u(\Delta\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} h\varphi\,dx$ for enhver funktion $\varphi$ i $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Vis, at der findes en kontinuert funktion $k$ på $\mathbb{R}^2$, sådan at $u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} k\varphi\,dx$ for enhver funktion $\varphi$ i $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.