Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1990

Matematik 3 MA

Opgavesæt til besvarelse i løbet af $2\frac{1}{2}$ dag.

Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).

Opgavesættet udleveres den 6. juni 1990 fra kl. 9.00 på Matematisk Instituts kontor, og besvarelsen afleveres sammesteds senest den 8. juni kl. 16.00, dateret og underskrevet af eksaminanden.

Det er ikke nødvendigt at gentage hele opgaveteksten i besvarelsen.

Opgave 1

Lad λ betegne topologien på $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ givet ved seminormerne $\varphi \mapsto \sup_{x\in\mathbf{R}^n, |\alpha|\leqq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, med $m = 0, 1, 2, \ldots$.

a. Vis, at for $\beta \in \mathbf{N}_0^n$ er ∂^β en kontinuert afbildning af $(C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \lambda)$ ind i $(C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \lambda)$.

Lad $\mathcal{D}_\lambda{}'(\mathbf{R}^n)$ betegne det duale rum til $(C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \lambda)$.

b. Vis, at $\mathcal{D}_\lambda{}'(\mathbf{R}^n) \subseteqq \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

c. Vis, at for enhver funktion i $L^1(\mathbf{R}^n)$ er den tilsvarende distribution i $\mathcal{D}_\lambda{}'(\mathbf{R}^n)$.

d. Vis, at enhver distribution med kompakt støtte på $\mathbf{R}^n$ tilhører $\mathcal{D}_\lambda{}'(\mathbf{R}^n)$.

e. Vis, at enhver distribution i $\mathcal{D}_\lambda{}'(\mathbf{R}^n)$ er tempereret og endda tilhører et af Sobolevrummene $H^t(\mathbf{R}^n)$, $t \in \mathbf{R}$.

f. Vis, at distributionen givet ved funktionen 1 er tempereret, men ikke tilhører nogen af Sobolevrummene $H^t(\mathbf{R}^n)$, $t \in \mathbf{R}$.

Opgave 2

1. Lad der være givet to Hilbertrum V og H og en kontinuert lineær afbildning J af V ind i H. Lad V_0 være et tæt underrum i V. Antag, at $J(V)$ er tæt i H, og at der for hvert u i V_0 findes en konstant $c_u \in [0, \infty[$, sådan at $|(u \mid v)_V| \leqq c_u \| Jv \|_H$ for hvert v i V_0.

a. Vis, at J og J^* begge er injektive.

b. Vis, at $J^{*-1}J^{-1}$ er en selvadjungeret operator på H.

c. Vis, at for u i V_0 er $y \mapsto (J^{-1}y \mid u)_V$ en kontinuert lineær funktional på $J(V)$.

d. Vis, at $J(V_0)$ er indeholdt i definitionsområdet for $J^{*-1}J^{-1}$.

2. Betragt specialtilfældet hvor $H = L^2(\mathbf{R}^2)$, $V = L_1^2(\mathbf{R}^2)$, $V_0 = L_2^2(\mathbf{R}^2)$ og J er den identiske afbildning af $L_1^2(\mathbf{R}^2)$ ind i $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Opgave 2 fortsættes på side 2

Vis, at $J^*(L^2(\mathbb{R}^2)) = L_2^2(\mathbb{R}^2)$, og find $J^{*-1}J^{-1}$.

3. Betragt endelig tilfældet, hvor $H = L^2(\mathbb{R}^2)$, $V = H^1(\mathbb{R}^2)$, $V_0 = H^2(\mathbb{R}^2)$ og J er den identiske afbildning af $H^1(\mathbb{R}^2)$ ind i $L^2(\mathbb{R}^2)$. Find $J^{*-1}J^{-1}$.

Opgave 3

Lad b betegne funktionen givet ved $b(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
Lad A betegne differentialoperatoren $A = \frac{1}{i}\frac{d}{dx} + b$ på intervallet $I =]-a, a[\subseteqq \mathbb{R}$, $a \in]0, \infty]$.

a. Find definitionsområdet for den maksimale realisation $A_{\max}$.

b. Find definitionsområdet for den minimale realisation $A_{\min}$.

c. Vis, at A har en selvadjungeret realisation.

d. Vis, at hvis $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in D(A_{\max})$ og $A_{\max} f = \lambda f$, så er $\bar{f} f$ en konstant funktion.

e. Antag, at $a = \infty$, d.v.s. $I = \mathbb{R}$. Vis, at $A_{\max}$ ikke har nogen egenværdi.