Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1989

Matematik 3MA

Opgavesæt til besvarelse i løbet af fredag den 16. juni 1989.
Opgaverne skal besvares af hver eksaminand alene, uden hjælp fra andre personer. Brug af fagbøger, noter og lignende er tilladt.
Opgavesættet udleveres på Matematisk Instituts kontor, E 103, kl. 9.00 og afleveres i den originale kuvert samme sted kl. 16.30.
Besvarelsen dateres og underskrives af eksaminanden, der derved erklærer at have overholdt ovenstående.

Opgave 1.

Lad N være en normal operator på Hilbertrummet $\mathcal{H}$.

1° Gør rede for at der for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes en mængde $\{P_1, P_2, .., P_n\}$ af indbyrdes ortogonale projektioner med sum 1 og en mængde $\{\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n\} \subseteq \mathbb{C}$ for hvilke

$$\|N - \sum_j \lambda_j P_j\| < \varepsilon$$

2° Gør rede for at den i 1. nævnte operator $S := \sum_j \lambda_j P_j$ er diagonaliserbar, altså at $\mathcal{H}$ har en ortonormalbasis af egenvektorer for S .

3° Vis at der findes en følge af normale, invertible operatorer N_k , $k=1,2,..$ for hvilke

$$\lim_{k\to\infty} \|N - N_k\| = 0.$$

Opgave 2.

Lad A være en Banachalgebra med enhed. En kommutativ delalgebra $C \subseteq A$ siges at være en maximal kommutativ delalgebra hvis enhver delalgebra af A hvori C er ægte indeholdt er ikke-kommutativ.

1° Lad $B \subseteq A$ være en kommutativ delalgebra. Vis at der findes en maximal kommutativ delalgebra C der indeholder B. Vis at C er en Banachalgebra.

(Opgaven fortsætter - vend!)

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1989

Matematik 3MA

Lad C være en maximal kommutativ delalgebra af A .

2° Vis at $a \in A$ tilhører C hvis og kun hvis a kommuterer med ethvert element i C .

3° Lad σ betegne spektrum . Hvis $a \in C$ skal det vises at

$$\sigma_A(a) = \sigma_C(a) .$$

4° Lad $a , b \in A$ og antag at a og b kommuterer. Vis at

$$\sigma_A(ab) \subseteq \sigma_A(a)\sigma_A(b) := \{xy \mid x \in \sigma_A(a),\ y \in \sigma_A(b) \} .$$

Giv et eksempel hvor der gælder lighedstegn; illustrer også at inklusionen kan være ægte.

Opgave 3.

Lad A betegne mængden af differentiable funktioner $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ med kontinuert afledet, udstyret med normen

$$\|f\| := \max_{t\in[0,1]}|f(t)| + \max_{t\in[0,1]}|f'(t)| .$$

1° Vis at med de sædvanlige punktvise regneoperationer er der herved defineret en kommutativ Banachalgebra. Udstyr også A med involutionen defineret ved punktvis kompleks konjugering. Er $(A, \|\ \|)$ en C*-algebra?

2° Vis at maximal-ideal-rummet Σ kan identificeres med $[0,1]$. Beskriv Gelfand-transformationen og vis den er injektiv og har tæt billede i $C([0,1])$.

3° Lad $I := \{ f \in A \mid f(0) = f'(0) = 0 \}$. Vis at I er et afsluttet ideal som er indeholdt i netop et maximalt ideal M .

4° Vis at M/I er en 1-dimensional Banachalgebra hvori alle produkter er nul.

Opgavesættet er slut.