Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedsekasamen, sommeren 1988

Matematik 3 MA

Opgavesæt til besvarelse i løbet af $2\frac{1}{2}$ dag.

Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).

Opgavesættet udleveres den 14. juni 1988 fra kl. 9.00 på Matematisk Instituts kontor, og besvarelsen afleveres sammesteds senest den 16. juni kl. 16.00, dateret og underskrevet af eksaminanden.

Det er ikke nødvendigt at gentage hele opgaveteksten i besvarelsen.

Opgave 1

Lad u betegne distributionen på $\mathbf{R}$:

$$u = \delta_0 - \delta_1.$$

1° Vis, at der findes en kontinuert funktion f på $\mathbf{R}$, for hvilken

$$u = f'',$$

og angiv en sådan.

2° Vis, at der findes et sæt bestående af tre kontinuerte funktioner g_0, g_1 og g_2 på $\mathbf{R}$ med kompakt støtte, for hvilket

$$u = g_0 + g_1' + g_2'',$$

og angiv et sådant sæt.

Opgave 2

Lad $a(x)$ være en reel C^∞-funktion på $\mathbf{R}$, der opfylder

$$c_1 \geq a(x) \geq c_2, \qquad |a'(x)| \leq c_3,$$

for alle $x \in \mathbf{R}$, med positive konstanter c_1, c_2 og c_3. Lad S_0 være operatoren $-\frac{d}{dx}a\frac{d}{dx}$: $u \mapsto -(au')'$ med definitionsområde $D(S_0) = C_0^\infty(\mathbf{R})$.

Opgave 2 fortsættes på side 2

1° Vis, at S_0 er en symmetrisk operator i $L^2(\mathbf{R})$ med nedre grænse 0.

2° Vis, at Friedrichs udvidelsen S af S_0 er operatoren $-\frac{d}{dx}a\frac{d}{dx}$ med definitionsområde $D(S) = H^2(\mathbf{R})$.

3° Lad yderligere $b(x)$ være en reel C^∞-funktion, med $|b(x)| \leq a(x)$ for alle x. Lad $s_1(u,v)$ være den sesquilineære form

$$s_1(u,v) = \int_{\mathbf{R}} (a(x) + ib(x))u'(x)\,\overline{v'(x)}\,dx,$$

defineret på $H^1(\mathbf{R}) \subset L^2(\mathbf{R})$. Gør rede for, at $s_1(u,v)$ opfylder betingelserne for anvendelse af Lax–Milgram's sætning (med $H = L^2(\mathbf{R})$ og $V = H^1(\mathbf{R})$), og bestem den tilhørende operator S_1. Vis, at dennes numeriske værdimængde opfylder:

$$\nu(S_1) \subset \{\, z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im} z| \leq \operatorname{Re} z \,\}.$$

Opgave 3

Lad a og b være reelle tal, og lad $u(x,y)$ være en funktion i $L^2(\mathbf{R}^2)$, der opfylder differentialligningen

$$(*) \qquad (a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial^2}{\partial x^2})u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = f,$$

hvor f er en funktion i $L^2(\mathbf{R}^2)$.

1° Vis, at hvis $b > 0$, så er $u \in H^2(\mathbf{R}^2)$.

2° Vis, at hvis $b = 0$ og $a \neq 0$, så er $u \in H^1(\mathbf{R}^2)$.

Herefter betragtes $(*)$ for u og f i $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)$.

3° Lad $a = 0$ og $b = -1$. Vis, at funktionen $u(x,y) = H(x-y)$ er en løsning til $(*)$ med $f = 0$, for hvilken $\partial_x u$ og $\partial_y u$ ikke tilhører $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)$, og dermed $u \notin H^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^2)$. ($H$ betegner Heaviside funktionen.)