Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen
Sommeren 1987

MATEMATIK 3 MA

Opgavesæt til besvarelse i løbet af 2 1/2 dag.

Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).

Opgavesættet udleveres den 24. juni 1987 fra kl. 9.00 på Matematisk Instituts kontor, og besvarelsen afleveres sammesteds senest den 26. juni kl. 16.00, dateret og underskrevet af eksaminanden.

Det er ikke nødvendigt at gentage hele opgaveteksten i besvarelsen.

Opgave 1

Lad A betegne differentialoperatoren i én variabel

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + 1 .$$

1° Først betragtes operatoren på $\mathbb{R}$, hvor Fourier transformationen eventuelt kan benyttes. Lad $a_1(u,v)$ betegne den sesquilineære form

$$a_1(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{du}{dx}\frac{d\bar{v}}{dx} + \frac{du}{dx}\bar{v} + u\bar{v}\right)dx ,$$

defineret på $V_1 = H^1(\mathbb{R})$, der betragtes som et underrum af $L^2(\mathbb{R})$.

(i) Vis, at a_1 er V_1-elliptisk, således at den definerer en operator A_1 i $L^2(\mathbb{R})$ ved Lax-Milgrams sætning. Vis, at A_1 virker som A og har definitionsmængden

$$D(A_1) = H^2(\mathbb{R}) .$$

(Opgaven fortsættes)

(ii) Vis, at A_1^* virker som

$$A' = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} + 1$$

og har definitionsmængde $D(A_1^*) = H^2(\mathbb{R})$.

(iii) Find definitionsmængde og virkning af operatorerne $A_1^* A_1$ og $A_1 A_1^*$, og vis specielt at de er den samme operator, altså at A_1 er <u>normal</u>.

(iv) Vis, at den numeriske værdimængde for A_1 er indeholdt i mængden

$$M = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,\lambda \geq 1 \ , \ |\mathrm{Im}\,\lambda| \leq \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\lambda\} \ .$$

[Man kan eventuelt først vise, at $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dx}\,\bar{u}\,dx$ er rent imaginær, når $u \in V_1$.]

2° Dernæst betragtes A på intervallet $I =]0,1[$. Lad a_0 være den sesquilineære form

$$a_0(u,v) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\frac{d\bar{v}}{dx} + \frac{du}{dx}\,\bar{v} + u\bar{v}\right)dx \ ,$$

defineret på $V_0 = H_0^1(I)$, der betragtes som et underrum af $L^2(I)$.

(i) Vis, at a_0 er V_0-elliptisk, så at den definerer en operator A_0 i $L^2(I)$ ved Lax-Milgrams sætning. Vis, at A_0 virker som A og har definitionsmængden

$$D(A_0) = H^2(I) \cap H_0^1(I) = \{u \in H^2(I) \mid u(0) = u(1) = 0\} \ .$$

(ii) Bestem A_0^* eksplicit (dvs. find definitionsmængde og virkning).

(Opgaven fortsættes)

(iii) Bestem $A_o^* A_o$ og $A_o A_o^*$ eksplicit, og vis specielt at de er forskellige, altså at A_o <u>ikke</u> er normal.

(iv) Vis, at den numeriske værdimængde for A_o er indeholdt i mængden M defineret i pkt. 1°(iv) .

Opgave 2

Lad g betegne funktionen $g(x) = H(x)e^{ix}$ for $x \in \mathbb{R}$, hvor H er Heaviside funktionen.

(i) Gør rede for, at g kan identificeres med en tempereret distribution $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ med støtte i $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(ii) Vis, at g er en løsning u til differentialligningen

(1) $$(\frac{d}{dx} - i)u = \delta \quad \text{i} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}) .$$

Undersøg, om denne ligning har andre løsninger i $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(iii) Lad $\hat{g} = \mathcal{F}[g]$. Vis, at $\hat{g} \notin L^2(\mathbb{R})$.

(iv) Vis, at $\hat{g}$ er en løsning v til multiplikationsligningen

(2) $$(\xi - 1)v = -i \quad \text{i} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

(hvor $(\xi-1)$ står for multiplikation med polynomiet $\xi-1$) .

(v) Lad g_ε betegne funktionen $g_\varepsilon(x) = H(x)e^{(i-\varepsilon)x}$, hvor $\varepsilon > 0$. Vis, at

$$\mathcal{F}[g_\varepsilon] = \frac{1}{i(\xi-1)+\varepsilon} .$$

(vi) Vis, at $g_\varepsilon \to g$ i $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ for $\varepsilon \to 0+$.

(vii) Lad $\Omega = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Vis, at $\hat{g}|_\Omega \in L^1_{loc}(\Omega)$ (bestem funktionen), men at $\hat{g} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

(Opgaven fortsættes)

(viii) Undersøg, om ligningen (2) har mere end én løsning v i $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Undersøg, om følgende ligning (for et reelt $\varepsilon \neq 0$)

$$(\xi-1+i\varepsilon)w = 1 \tag{3}$$

har mere end én løsning w i $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Opgave 3

Lad n være hel ≥ 1, og lad P betegne differentialoperatoren på $\mathbb{R}^n$

$$P = D_1^{2k_1} + D_2^{2k_2} + \ldots + D_n^{2k_n} + 1,$$

hvor $k_1, k_2, \ldots, k_n$ er positive hele tal.

(i) Vis, at P er kontinuert i $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ og har en kontinuert invers P^{-1} i $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Find konstanter k og k', så at P er kontinuert fra $H^s(\mathbb{R}^n)$ til $H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$ og P^{-1} er kontinuert fra $H^s(\mathbb{R}^n)$ til $H^{s+k'}(\mathbb{R}^n)$ for alle $s \in \mathbb{R}$.

(ii) Angiv en betingelse på sættet $\{k_1, \ldots, k_n, n\}$, der er tilstrækkelig for at P har egenskaben:

$$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \text{ og } Pu \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ medfører } u \in C^0(\mathbb{R}^n).$$