Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1986

MATEMATIK 3 MA

Opgavesæt til besvarelse i løbet af 2½ dag.

Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).

Opgavesættet udleveres den 25. juni 1986 fra kl. 9.00 på Matematisk Instituts kontor, og besvarelsen afleveres sammesteds senest den 27. juni kl. 16.00, dateret og underskrevet af eksaminanden.

Det er ikke nødvendigt at gentage hele opgaveteksten i besvarelsen.

Opgave 1

Man betragter differentialoperatoren A defineret på $C^\infty(\mathbb{R})$ ved

$$(Au)(x) = (1-ix)D_x[(1+ix)u(x)] ,$$

hvor $D_x = -i\frac{d}{dx}$. A er defineret på $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ i distributionsforstand.

(a) Vis, at den tilhørende minimale operator A_{min} i $L^2(\mathbb{R})$ er en symmetrisk operator.

(b) Vis, at der for den tilhørende maksimale operator A_{max} i $L^2(\mathbb{R})$ gælder:

$$A_{max} = (A_{min})^* , \quad \text{og} \quad D(A_{max}) \subset H^1(\mathbb{R}) .$$

(c) Vis, at nulrummene $Z(A_{max} \pm i)$ ligger i $C^\infty(\mathbb{R})$, og bestem dem.

(d) Vis, at hverken A_{min} eller A_{max} er selvadjungerede operatorer.

(e) Lad v være en vektor af formen $v = v_+ + v_-$, hvor $v_\pm \in Z(A_{max} \pm i)$, og $\|v_+\| = \|v_-\| \neq 0$. Vis, at $D(A_{min}) \dotplus \mathbb{C}v$ er definitionsmængde for en selvadjungeret realisation af A . Angiv et sådant v eksplicit.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1986

Matematik 3 MA

Opgave 2

Lad $M_{|\xi|}$ betegne multiplikationsoperatoren i $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$M_{|\xi|} : f(\xi) \rightsquigarrow |\xi| f(\xi) ,$$

med definitionsmængden

$$D(M_{|\xi|}) = \{f(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid |\xi| f(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\} .$$

Lad P være operatoren i $L^2(\mathbb{R}^n)$ defineret ved:

$$P = \mathcal{F}^{-1} M_{|\xi|} \mathcal{F} , \qquad D(P) = \mathcal{F}^{-1} D(M_{|\xi|}) .$$

(a) Vis, at $D(P) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

(b) Bestem de dimensionstal n, for hvilke der gælder, at ligningen

$$Pu = v$$

har en løsning $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ for ethvert $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Antag fra nu af, at $n = 1$.

(c) Gør rede for, at såvel P som operatoren D_x (med definitionsmængde $H^1(\mathbb{R})$) er operatorer i $L^2(\mathbb{R})$, hvis kvadrat er lig med $-\frac{d^2}{dx^2}$ med definitionsmængde $H^2(\mathbb{R})$. (Man siger, at D_x og P begge er "kvadratrødder" af $-\frac{d^2}{dx^2}$, og P betegnes ofte $\left|\frac{d}{dx}\right|$.)

(d) Vis, at $D_x = \Lambda P$, hvor Λ er en begrænset operator i $L^2(\mathbb{R})$, med norm 1.

(Opgavesættet fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1986
Matematik 3 MA

Opgave 3

(a) Lad u betegne distributionen på $\mathbb{R}^2$ (hvis punkter betegnes ved (x,y)) defineret ved

$$\langle u,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (a\partial_x + b\partial_y)\varphi(x,0)\,dx \,, \quad \text{for} \quad \varphi(x,y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \;;$$

her er $a,b \in \mathbb{C}$ med $b \neq 0$. Vis, at ordenen af u er lig med 1.

(b) Lad K betegne mængden

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y|\} \,.$$

Bestem ordenen og støtten af distributionen $\partial_x\partial_y 1_K$ på $\mathbb{R}^2$. (Som sædvanlig betegner 1_M funktionen, der er 1 på mængden M, og er 0 ellers.) De indgående integraler kan eventuelt omformes ved hjælp af koordinatskiftet $z = x+y$, $w = x-y$.

(c) Lad K' betegne mængden

$$K' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\} \,.$$

Bestem ordenen og støtten af distributionen $\partial_x\partial_y 1_{K'}$ på $\mathbb{R}^2$. (Det bør specielt vises, at ordenen og støtten er mindre end for $\partial_x\partial_y 1_K$.)