Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999-2000

Matematik 3 GT

Tre timers skriftlig prøve delvis med hjælpemidler.
Sættet er på 4 sider og består af 4 opgaver.
De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler: Forelæsningsnoter, bøger, notater, lommeregnere etc. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af 1. del.

This is a three-hour written test, partly with accessories, partly without.
The test has 4 problems formulated on 4 pages.
The first 90 minutes are without accessories, the last 90 minutes with all usual accessories: books, mimeographed notes, private notes, hand-held (non-programmable) computers, etc. After 90 minutes the first part of the test is collected.

1. del uden hjælpemidler.

1. part without accessories.

Opgave 1 (25 points)

(a) Formulér Tietze's udvidelsessætning.

(b) Lad $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion på det halvåbne interval $]0,1]$. Angiv – med bevis – en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at der findes en kontinuert funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som udvider f.

(c) Angiv en kontinuert udvidelse til hele $\mathbb{R}$ af funktionen

$$f(x) = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 1 .$$

Problem 1 (25 points)

(a) Formulate Tietze's extension theorem.

(b) Let $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ be a continuous function on the half-open interval $]0,1]$. State and prove a necessary and sufficient condition for the existence of a continuous function $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, that extends f.

(c) Determine a continuous extension to all of $\mathbb{R}$ of the function

$$f(x) = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}, \quad 0 < x \leq 1 .$$

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2 (25 points)

(a) Formulér definitionerne af at et topologisk rum $(X, \mathcal{T})$ er sammenhængende, respektivt kurvesammenhængende.

(b) Vis at hvis $(X, \mathcal{T})$ er kurvesammenhængende, da er det også sammenhængende.

(c) Lad $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, være en vilkårlig familie af kurvesammenhængende rum. Sæt $X = \prod X_i$ og udstyr X med produkttopologien. Vis at X er kurvesammenhængende.

Problem 2 (25 points)

(a) Formulate the definitions of a topological space $(X, \mathcal{T})$ being connected, respectively arcwise connected.

(b) Show that if $(X, \mathcal{T})$ is arcwise connected then it is also connected.

(c) Let $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, be an arbitrary family of arcwise connected spaces. Put $X = \prod X_i$ and give X the product topology. Show that X is arcwise connected.

2. del med hjælpemidler

2. part with accessories

Opgave 3 (25 points)

Et universalnet $(n_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ i mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal kaldes *frit*, hvis der for ethvert n findes et λ_0 i Λ, således at $n_\lambda \geq n$ for $\lambda > \lambda_0$. Universalnettet kaldes *trivielt*, hvis der findes et n og et λ_0 i Λ, således at $n_\lambda = n$ for $\lambda > \lambda_0$.

(a) Vis at et universalnet i $\mathbb{N}$ enten er frit eller trivielt.

(b) Vis at der findes både frie og trivielle universalnet i $\mathbb{N}$.

(c) Vis at hvis (a_n) er en begrænset talfølge i $\mathbb{R}$, så er nettet $(a_{n_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ konvergent med en grænseværdi kaldet $\lim_\Lambda a_n$.

(d) Vis at hvis universalnettet er frit så vil grænseværdien fra (c) opfylde at

$$\lim_{\Lambda} a_n \leq \limsup a_n \, .$$

(e) Vis at hvis universalnettet er frit og hvis (a_n) er en konvergent talfølge så vil

$$\lim_{\Lambda} a_n = \lim a_n \, .$$

Opgave 3 fortsættes på side 3

Problem 3 (25 points)

A universal net $(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in the set $\mathbb{N}$ of natural numbers is called *free*, if for each n there is a λ_0 in Λ such that $n_\lambda \geq n$ for $\lambda > \lambda_0$. The universal net is called *trivial*, if there exists an n and a λ_0 in Λ such that $n_\lambda = n$ for $\lambda > \lambda_0$.

(a) Show that a universal net in $\mathbb{N}$ is either free or trivial.

(b) Show that $\mathbb{N}$ has both free and trivial universal nets.

(c) Show that if (a_n) is a bounded sequence in $\mathbb{R}$, then the net $(a_{n_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ is convergent with a limit called $\lim_\Lambda a_n$.

(d) Show that if the universal net is free, then the limit above will satisfy

$$\lim_\Lambda a_n \leq \limsup a_n\,.$$

(e) Show that if the universal net is free and (a_n) is a convergent sequence, then

$$\lim_\Lambda a_n = \lim a_n\,.$$

Opgave 4 (25 points)

Som bekendt kaldes to topologiske rum X og Y homotopiækvivalente, hvis der findes kontinuerte afbildninger $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$, således at $g \circ f$ er homotop med I_X og $f \circ g$ er homotop med I_Y, hvor I betegner den identiske afbildning.

(a) Vis at bogstaverne **A** og **R**, opfattet som lukkede delmængder af $\mathbb{R}^2$, er homotopiækvivalente. Der kræves ingen analytiske udtryk for de homotopier som anvendes, blot en angivelse af de skridt der er nødvendige for at komme fra **A** til **R**, samt en begrundelse for at en trinvis reduktion er tilladelig.

(b) Angiv – uden bevis – antallet af homotopiklasser i versalerne (de store bogstaver) i det europæiske standard alfabet $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \cdots, \mathbf{Z}\}$.

(c) Vis at hvis X_j er homotopiækvivalent med Y_j for ethvert j i en mængde J, så er $\prod X_j$ homotopiækvivalent med $\prod Y_j$, når produktrummene udstyres med produkttopologierne.

Problem 4 (25 points)

As usual two topological spaces X and Y are called homotopy equivalent, if there exist continuous maps $f : X \to Y$ and $g : Y \to X$, such that $g \circ f$ is homotopic to I_X and $f \circ g$ is homotopic to I_Y, where I denotes the identity map.

(a) Show that the letters **A** and **R**, considered as closed subsets of $\mathbb{R}^2$, are homotopy equivalent. No analytical expressions for the homotopies are required, just an indication of the steps needed to go from **A** to **R**, and an explanation of why such a step-wise reduction is admissible.

Opgave 4 fortsættes på side 4

(b) Compute the number of homotopy equivalence classes in the set of capital letters in the standard European alphabet $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \cdots, \mathbf{Z}\}$. No proof is required.

(c) Show that if X_j is homotopy equivalent to Y_j for every j in some set J, then $\prod X_j$ is homotopy equivalent to $\prod Y_j$, when the product spaces are given the product topologies.