Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1999

Matematik 3 GT

Tre timers skriftlig prøve delvis med hjælpemidler.

Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler: Forelæsningsnoter, bøger, notater, lommeregnere etc. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af 1. del.

1. del uden hjælpemidler.

Opgave 1 (25 points)

Lad $(M_1, \mathcal{T}_1)$ og $(M_2, \mathcal{T}_2)$ være to topologiske rum og lad $f : M_1 \to M_2$ være en afbildning.

a) Definér, at f er kontinuert udtrykt ved systemerne $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ af åbne mængder.

b) Vis, at f er kontinuert hvis og kun hvis der om enhver afsluttet mængde $F \subseteq M_2$ gælder, at $f^{-1}(F)$ er afsluttet i M_1.

c) Definér delrumstopologien $\mathcal{T}_A$ på en delmængde $A \subseteq M_1$.

d) Antag, at $M_1 = F_1 \cup \cdots \cup F_n$, hvor $F_1, \ldots, F_n$ er afsluttede, og at f har en kontinuert restriktion til hvert F_i, dvs. for hvert $i = 1, \ldots, n$ er restriktionen $f \mid F_i : F_i \to M_2$ kontinuert, idet F_i er forsynet med delrumstopologien $\mathcal{T}_{F_i}$. Vis, at f er kontinuert.

Opgave 2 (25 points)

Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum og lad $x_0 \in M$.

a) Definér begrebet en løkke baseret i x_0 og definér, at to løkker f, g baseret i x_0 er sti-homotope, i symboler $f \simeq_s g$.

b) Definér sammensætningen $f * g$ af to løkker f, g baseret i x_0 og vis om løkker f, f', g, g' baseret i x_0, at hvis $f \simeq_s f'$ og $g \simeq_s g'$ så er $f * g \simeq_s f' * g'$.

c) Definér fundamentalgruppen $\pi_1(M, x_0)$ idet der skal gøres rede for hvad elementerne i $\pi_1(M, x_0)$ er, og hvorledes gruppekompositionen er defineret. Der ønskes ikke bevis for den associative lov, men der ønskes (uden bevis) en angivelse af det neutrale element og det inverse til et givet element.

d) Lad $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ med delrumstopologien fra $\mathbb{R}^2$ og lad $x_0 = (0, 0)$. Vis, at $\pi_1(M, x_0) = \{1\}$.

Opgave 2 fortsættes på side 2

2. del med hjælpemidler.

Opgave 3 (25 points)

Lad $\mathbb{R}^{(\infty)}$ betegne mængden af reelle talfølger $x = (x_n) = (x_1, x_2, \dots)$, som er 0 fra et vist trin, der kan afhænge af den enkelte følge. For hvert $n = 1, 2, \dots$ defineres $j_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{(\infty)}$ ved $j_n((x_1, \dots, x_n)) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$.

a) Vis, at $\operatorname{card} \mathbb{R}^{(\infty)} = \aleph$.

b) Vis, at delmængden $\mathbb{Z}^{(\infty)}$ af følger af hele tal, der er nul fra et vist trin, er numerabel.

c) Lad $\mathbb{R}^{(\infty)}$ være forsynet med finaltopologien $\mathcal{T}$ m.h.t. afbildningerne $j_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{(\infty)}$, idet $\mathbb{R}^n$ har den sædvanlige topologi. Vis, at mængden

$$G = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{(\infty)} \mid |x_n| < \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \dots\}$$

er åben, og at mængden

$$F = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{(\infty)} \mid |x_n| \le \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \dots\}$$

er afsluttet i finaltopologien.

Opgave 4 (25 points)

Lad G betegne følgende delmængde af $\mathbb{R}^3$:

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 < x_1^2 + x_2^2 < 2,\ x_3 > x_1^2 + x_2^2\}.$$

a) Vis, at G er åben og sammenhængende.

b) Vis, at afslutningen af G i $\mathbb{R}^3$ er givet ved

$$\overline{G} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 2,\ x_3 \ge x_1^2 + x_2^2\}.$$

Definér de kontinuerte afbildninger $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, p : G \to \mathbb{R}^2$ ved

$$j(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 2), \quad p(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right).$$

c) Gør rede for at $j(S^1) \subseteq G$ og $p(G) \subseteq S^1$, idet som sædvanlig S^1 er enhedscirklen i $\mathbb{R}^2$,

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

d) Vis, at $p \circ j \mid S^1$ er den identiske afbildning af S^1, og benyt dette til at vise, at G ikke er enkeltsammenhængende.