Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998-1999

Matematik 3 GT

Tre timers skriftlig prøve delvis med hjælpemidler.

Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler: Forelæsningsnoter, bøger, notater, lommeregnere etc. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af 1. del.

1. del uden hjælpemidler.

Opgave 1 (25 points)

a) Definér begreberne ordnet mængde og totalt ordnet mængde.

b) Angiv 2 eksempler på ordnede mængder hvoraf den ene er totalt ordnet, den anden ikke totalt ordnet.

c) Definér begreberne maksimalt element og induktivt ordnet mængde. Formulér Zorns lemma.

d) Bevis følgende resultat ved hjælp af Zorns lemma:

Enhver ikke-tom ordnet mængde $(M, \leq)$ indeholder en maksimal totalt ordnet delmængde (altså en totalt ordnet delmængde, der er maksimal ved inklusion blandt de totalt ordnede delmængder).

Opgave 2 (25 points)

a) Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum. Angiv definitionen på hvert af følgende udsagn:

$(M, \mathcal{T})$ er sammenhængende.
$(M, \mathcal{T})$ er kurvesammenhængende.

b) Vis, at et kurvesammenhængende topologisk rum er sammenhængende.

c) Lad $f : (M_1, \mathcal{T}_1) \to (M_2, \mathcal{T}_2)$ være en kontinuert surjektiv afbildning mellem topologiske rum. Vis, at hvis $(M_1, \mathcal{T}_1)$ er sammenhængende (resp. kurvesammenhængende), så er $(M_2, \mathcal{T}_2)$ sammenhængende (resp. kurvesammenhængende).

d) Idet det kan benyttes, at intervaller er sammenhængende delmængder af $\mathbb{R}$, skal man angive sammenhængskomponenterne i mængden $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ med delrumstopologien fra $\mathbb{R}^2$. Der ønskes bevis for at de angivne mængder virkelig er sammenhængskomponenterne.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

2. del med hjælpemidler.

Opgave 3 (30 points)

a) Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum og lad A være en ikke-tom delmængde af M forsynet med delrumstopologien $\mathcal{T}_A$.

Vis, at inklusionsafbildningen $I_A : A \to M$ givet ved $I_A(x) = x$ er åben hvis og kun hvis $A \in \mathcal{T}$.

b) Lad $f : (M, \mathcal{T}) \to (N, \mathcal{S})$ være en åben afbildning mellem topologiske rum. Vis, at hvis $B \subseteq N$ er overalt tæt i N, så er $f^{-1}(B)$ overalt tæt i M.

c) Lad f, g være to åbne afbildninger af $(M, \mathcal{T})$ ind i $(N, \mathcal{S})$. Vis, at produktafbildningen $f \times g : M \times M \to N \times N$ er åben, idet $M \times M$ og $N \times N$ tænkes forsynet med produkttopologierne.

(Der mindes om at $(f \times g)(m_1, m_2) = (f(m_1), g(m_2))$ for $(m_1, m_2) \in M \times M$.)

Opgave 4 (20 points)

Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum, $M \neq \emptyset$, og lad $\mathcal{F}$ være et filter på M.

a) Vis, at der for endelig mange mængder $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ gælder $(\complement \overline{F}_1) \cup \cdots \cup (\complement \overline{F}_n) \neq M$.

b) Antag nu, at rummet $(M, \mathcal{T})$ er kompakt. Vis, at der findes $a \in M$ så

$$a \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}.$$