Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1998

Matematik 3 GT

Tre timers skriftlig prøve delvis med hjælpemidler.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler: Forelæsningsnoter, bøger, notater, lommeregnere etc. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af 1. del.

1. del uden hjælpemidler.

Opgave 1 (25 points)

Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum.

a) Angiv definitionen af at et punkt $x \in M$ er et kontaktpunkt for en delmængde $A \subseteq M$ og definér afslutningen $\mathrm{cl}(A)$ af A. ($\mathrm{cl}(A)$ betegnes også $\overline{A}$).

b) Vis, at $\mathrm{cl}(A)$ er den mindste afsluttede mængde, som indeholder A.

c) Vis, at der om delmængder A, B af M gælder

$$\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B).$$

d) Definér delrumstopologien $\mathcal{T}_A$ på en delmængde $A \subseteq M$ og vis, at der for en delmængde $X \subseteq A$ gælder

$$\mathrm{cl}_A(X) = A \cap \mathrm{cl}(X),$$

idet cl_A betegner afslutningen af X i delrummet $(A, \mathcal{T}_A)$.

Opgave 2 (25 points)

Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum og lad $\mathcal{C}_M$ betegne mængden af kontinuerte afbildninger af M ind i sig selv.

a) Definér, at to afbildninger $f, g \in \mathcal{C}_M$ er homotope, i symboler $f \simeq g$, og vis, at relationen homotop med ($\simeq$) er en ækvivalensrelation i $\mathcal{C}_M$.

b) Vis, at hvis $f \simeq f^*$ og $g \simeq g^*$ hvor $f, f^*, g, g^* \in \mathcal{C}_M$, så gælder også

$$g \circ f \simeq g^* \circ f^*.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

c) Idet $[f]$ betegner ækvivalensklassen af de med f homotope afbildninger fra $\mathcal{C}_M$, skal der gøres rede for, at formlen

$$[g] \circ [f] = [g \circ f]$$

definerer en regneoperation (komposition) i mængden

$$\mathcal{E}_M = \{[f] \mid f \in \mathcal{C}_M\}$$

af ækvivalensklasser. Angiv et neutralt element ved regneoperationen.

d) I tilfældet $M = \mathbb{R}$ med den sædvanlige topologi skal man bestemme antallet af elementer i $\mathcal{E}_\mathbb{R}$.

2. del med hjælpemidler.

Opgave 3 (30 points)

Lad $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være kontinuerte funktioner og antag, at $f(x) < g(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Definér mængden

$$M(f,g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R},\ f(x) < y < g(x)\}.$$

a) Vis, at $M(f,g)$ er en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$.

b) Vis, at afslutningen af $M(f,g)$ er givet ved

$$\mathrm{cl}(M(f,g)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

c) Vis, at $M(f,g)$ er sammenhængende.

d) Vis, at randen af $M(f,g)$ har 2 sammenhængskomponenter og bestem disse.

Opgave 4 (20 points)

Lad $(M, \mathcal{T})$ være et kompakt topologisk rum og lad der være givet et punkt $x_0 \in M$. Lad $f : M \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ være en funktion som antages kontinuert, når $M \setminus \{x_0\}$ forsynes med delrumstopologien fra M.

a) Vis, at hvis f har grænseværdien $a \in \mathbb{R}$ for x gående mod x_0, altså hvis $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, så er f begrænset.
(Der mindes om at $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ betyder

$$\forall \varepsilon > 0 \exists U \in \mathcal{U}(x_0) \forall x \in U \setminus \{x_0\} : |f(x) - a| < \varepsilon.)$$

b) Antag yderligere, at $(M, \mathcal{T})$ er et Hausdorff rum. Vis, at delrummet $M \setminus \{x_0\}$ er lokalkompakt.