Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1997-1998

Matematik 3 GT

Tre timers skriftlig prøve delvis med hjælpemidler.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler: Forelæsningsnoter, bøger, notater, lommeregnere etc. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af 1. del.

1. del uden hjælpemidler.

Opgave 1 (25 points)

Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum.

a) Angiv definitionen af at et punkt $x \in M$ er et indre punkt i en delmængde $A \subseteq M$ og definér det indre $\operatorname{int} A$ af A.

b) Vis, at $\operatorname{int} A$ er den største åbne delmængde af A.

c) Vis, at der om delmængder A, B af M gælder

$$\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B).$$

d) Definér produktet af to topologiske rum $(M_1, \mathcal{T}_1), (M_2, \mathcal{T}_2)$ og vis, at for $A_1 \subseteq M_1$, $A_2 \subseteq M_2$ gælder

$$\operatorname{int}(A_1 \times A_2) = \operatorname{int}(A_1) \times \operatorname{int}(A_2).$$

Opgave 2 (25 points)

Lad M være en ikke tom mængde.

a) Definér begreberne et net i M og et filter på M.

b) Formulér Zorns Lemma og udnyt det til at vise, at ethvert filter $\mathcal{F}$ på M kan forfines til et ultrafilter.

c) Bevis, at et filter $\mathcal{F}$ er et ultrafilter på M, hvis og kun hvis der om enhver delmængde $A \subseteq M$ gælder $A \in \mathcal{F}$ eller $\complement A \in \mathcal{F}$.

d) Vis følgende Sætning: En afbildning f af et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ ind i et topologisk rum $(M_2, \mathcal{T}_2)$ er kontinuert i $x \in M_1$, hvis og kun hvis der om ethvert net $(x_i)_{i \in I}$ på M_1 gælder

$$\lim_{i \in I} x_i = x \Rightarrow \lim_{i \in I} f(x_i) = f(x).$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

2. del med hjælpemidler.

Opgave 3 (30 points)

Produktrummet $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ forsynes med produkttopologien, altså initialtopologien for afbildningerne $\pi_k : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, givet ved $\pi_k((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_k$.

Lad $K = [-1,1]^{\mathbb{N}} = \{(x_n) \mid \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq 1\}$, idet vi kort skriver (x_n) i stedet for $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Vis, at K er kompakt.

b) Vis, at $\operatorname{int} K = \emptyset$.

c) Lad (x_n), (y_n) være to vilkårlige punkter i K. Vis, at der ved afbildningen $\varphi(t) = ((1-t)x_n + ty_n)$ defineres en sti $\varphi : [0,1] \to K$ fra (x_n) til (y_n), og vis, at K er en sammenhængende delmængde.

d) Gør rede for, at K er et enkeltsammenhængende rum med delrumstopologien.

Opgave 4 (20 points)

Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum.

a) Vis, at hvis $E_1, \ldots, E_n$ er ikke tomme sammenhængende delmængder af M så $E_i \cap E_{i+1} \neq \emptyset$ for $i = 1, \ldots, n-1$, så er $E_1 \cup \cdots \cup E_n$ en sammenhængende delmængde.

b) Vis, at hvis $E_1, \ldots, E_n$ er kompakte delmængder af M, så er $E_1 \cup \cdots \cup E_n$ kompakt.