Matematik 3 GT

Tre timers skriftlig prøve delvis med hjælpemidler.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler: Forelæsningsnoter, bøger, notater, lommeregnere etc. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af 1. del.

1. del uden hjælpemidler.

Opgave 1 (25 points)

a) Definér hvad det vil sige, at to mængder M, N er ækvipotente. Definér dernæst kardinaltallet card M for mængden M.

b) Lad der være givet fire mængder M_i, N_i, $i = 1, 2$ opfyldende card M_i = card N_i, $i = 1, 2$. Vis, at

$$\operatorname{card}(M_1 \times M_2) = \operatorname{card}(N_1 \times N_2)$$
$$\operatorname{card}(M_1^{M_2}) = \operatorname{card}(N_1^{N_2}),$$

idet der mindes om, at $M_1^{M_2}$ betegner mængden af afbildninger $h : M_2 \to M_1$.

c) Vis, at $\operatorname{card}(\mathbb{N}^k) = \operatorname{card} \mathbb{N}$ for alle $k \in \mathbb{N}$.

Opgave 2 (25 points)

Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum og lad A være en ikke tom delmængde af M.

a) Definér delrumstopologien $\mathcal{T}_A$ på A og vis, at $\mathcal{T}_A$ er den groveste topologi på A, så inklusionsafbildningen $I_A : A \to M$ er kontinuert.

b) Vis, at hvis $(M, \mathcal{T})$ opfylder 1. henholdsvis 2. tællelighedsaksiom, så gælder det tilsvarende om $(A, \mathcal{T}_A)$.

c) Vis, at hvis $(M, \mathcal{T})$ er et Hausdorff rum, så er $(A, \mathcal{T}_A)$ også et Hausdorff rum.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

2. del med hjælpemidler.

Opgave 3 (25 points)

Lad X, Y betegne to topologiske rum og lad $\mathcal{U}(x)$ betegne systemet af omegne af $x \in X$, $\mathcal{V}(y)$ systemet af omegne af $y \in Y$. Lad $X \times Y$ være forsynet med produkttopologien og betragt en funktion $f : X \times Y \to \mathbb{R}$.

a) Vis, at f er kontinuert i $(x_0, y_0) \in X \times Y$ hvis og kun hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists U \in \mathcal{U}(x_0) \, \exists V \in \mathcal{V}(y_0) \, \forall x \in U \, \forall y \in V : \\ |f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \, .$$

Antag i det følgende, at f er kontinuert på $X \times Y$ og lad $y_0 \in Y$ være et fast punkt.

b) Vis påstanden:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall x_0 \in X \, \exists U \in \mathcal{U}(x_0) \, \exists V \in \mathcal{V}(y_0) \, \forall x \in U \, \forall y \in V : \\ |f(x,y) - f(x, y_0)| < \varepsilon \, .$$

Antag nu yderligere, at rummet X er kompakt.

c) Vis følgende:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists V \in \mathcal{V}(y_0) \, \forall x \in X \, \forall y \in V : \\ |f(x,y) - f(x, y_0| < \varepsilon \, .$$

Opgave 4 (25 points)

Mængden

$$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}\}$$

forsynes med delrumstopologien fra $\mathbb{R}^2$.

a) Vis, at M er kurvesammenhængende.

Lad $r : M \to S^1$ være defineret ved

$$r(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

og sæt $e = (1,0)$.

b) Vis, at $r_{*,e} : \pi_1(M,e) \to \pi_1(S^1,e)$ er en surjektiv gruppehomomorfi.

c) Vis, at $r_{*,e}$ er injektiv, og vis dernæst, at fundamentalgruppen $\pi_1(M,e)$ er isomorf med $(\mathbb{Z},+)$.