Matematik 3 GT

Tre timers skriftlig prøve delvis med hjælpemidler.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler: Forelæsningsnoter, bøger, notater, lommeregnere etc. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af 1. del.

1. del uden hjælpemidler.

Opgave 1 (30 points)

a) Lad $(M,\mathcal{T})$ være et topologisk rum. Angiv definitionen på hvert af følgende udsagn:

$(M,\mathcal{T})$ er Hausdorff

$(M,\mathcal{T})$ er normalt

$(M,\mathcal{T})$ er kompakt

$(M,\mathcal{T})$ er sammenhængende.

b) Vis, at et kompakt Hausdorff rum er normalt.

c) Lad $f:(M_1,\mathcal{T}_1)\to(M_2,\mathcal{T}_2)$ være en kontinuert surjektiv afbildning mellem topologiske rum. Vis, at hvis $(M_1,\mathcal{T}_1)$ er kompakt og sammenhængende, så gælder det samme om $(M_2,\mathcal{T}_2)$.

Opgave 2 (20 points)

a) Lad M være et topologisk rum og lad $f,f',g,g':I\to M$ være stier i M, idet det antages, at f,f' går fra x_0 til x_1, og at g,g' går fra x_1 til x_2. Definer den sammensatte sti $f*g$ fra x_0 til x_2 og vis, at hvis $f\simeq_s f'$, $g\simeq_s g'$, så er $f*g\simeq_s f'*g'$.

b) Definer fundamentalgruppen $\pi_1(M,x_0)$, idet der gøres udførligt rede for, hvad gruppens elementer er, og hvad regneoperationen er. Derimod ønskes der ikke noget bevis for, at regneoperationen er associativ.

Angiv uden bevis gruppens neutrale element og det inverse element til et givet gruppeelement.

Opgavesættet fortsættes på side 2

2. del med hjælpemidler.

Opgave 3 (25 points)

a) Lad $f : M \to N$ være en kontinuert afbildning mellem topologiske rum. Vis, at der for enhver delmængde $A \subseteq N$ gælder:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\operatorname{int} A) &\subseteq \operatorname{int} f^{-1}(A) \\ f^{-1}(\operatorname{cl} A) &\supseteq \operatorname{cl} f^{-1}(A) \\ f^{-1}(\partial A) &\supseteq \partial f^{-1}(A) . \end{aligned}$$

b) Lad $f : M \to N$ være en afbildning mellem topologiske rum og antag, at der for enhver delmængde $A \subseteq N$ gælder

$$f^{-1}(\operatorname{int} A) \subseteq \operatorname{int} f^{-1}(A) .$$

Vis, at f er kontinuert.

Opgave 4 (25 points)

Lad (E, p) være en overlejring af rummet B.

a) Vis, at relationen $\sim$ i E defineret ved

$$x \sim y \Leftrightarrow p(x) = p(y)$$

er en ækvivalensrelation.

Lad $E/\!\sim$ betegne mængden af ækvivalensklasser i E under ækvivalensrelationen $\sim$, og lad $\kappa : E \to E/\!\sim$ betegne den kanoniske afbildning $\kappa(x) = [x]$, der til $x \in E$ knytter ækvivalensklassen $[x]$ indeholdende x.

b) Vis, at der findes en og kun en afbildning $\tilde{p} : E/\!\sim \to B$ så $\tilde{p} \circ \kappa = p$, og vis, at $\tilde{p}$ er bijektiv.

c) Idet $E/\!\sim$ forsynes med kvotienttopologien skal man vise, at $\tilde{p} : E/\!\sim \to B$ er en homeomorfi.