Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 2001-2002

Matematik 3GT

Tre timers skriftlig prøve delvis med hjælpemidler.
Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.
De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler: Forelæsningsnoter, bøger, notater, lommeregnere etc. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af 1. del.

1. del uden hjælpemidler.

Opgave 1 (25 %)

(a) Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum. Lad $A \subseteq M$. Definér, hvad det vil sige, at A er henholdsvis:

(1) åben,
(2) afsluttet,
(3) kompakt,
(4) sammenhængende,
(5) kurvesammenhængende.

(b) Betragt en kontinuert afbildning f fra et topologisk rum $(M_1, \mathcal{T}_1)$ til et andet $(M_2, \mathcal{T}_2)$. Angiv (med begrundelse) for hver af egenskaberne (1)–(5), hvilke af følgende udsagn, der gælder:

(*) $\qquad A \subseteq M_1$ har egenskaben $\implies f(A)$ har egenskaben,

(**) $\qquad B \subseteq M_2$ har egenskaben $\implies f^{-1}(B)$ har egenskaben.

Opgave 2 (25 %)

Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum.

(a) Lad $x \in M$. Hvad forstår man ved en omegnsbasis i x?

(b) Definér, hvad det vil sige, at $(M, \mathcal{T})$ opfylder 1. tællelighedsaksiom.

(c) Lad $\mathcal{S}$ være et system af åbne delmængder af M. Definér, hvad det vil sige, at $\mathcal{S}$ er en basis for $\mathcal{T}$, og definér, hvad det vil sige, at $(M, \mathcal{T})$ opfylder 2. tællelighedsaksiom.

(d) Vis, at når M opfylder 2. tællelighedsaksiom, så findes der en tællelig, overalt tæt delmængde af M.

Opgave 2 fortsættes på side 2

(b) Lad X være et metrisk rum med metrik d_X, sæt $X_t = X$ for $t \in [0,1]$, og lad M være den disjunkte foreningsmængde $M = \bigcup_{t\in[0,1]} X_t$, forsynet med metrikken d_M, hvor der for $x \in X_t$, $y \in X_{t'}$ gælder

$$d_M(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } t \neq t', \\ d_X(x,y), & \text{hvis } t = t'. \end{cases}$$

Find ud af, om M opfylder 1. og/eller 2. tællelighedsaksiom.

2. del med hjælpemidler.

Opgave 3 (35 %)

Lad M betegne rummet af begrænsede reelle talfølger, altså følger $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots)$ for hvilke der findes et $R \geq 0$ (afhængigt af følgen), så at

$$|x_n| \leq R \text{ for alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Vis, at $\operatorname{card} M = \aleph$.

(b)[1] Lad N være delmængden bestående af begrænsede følger af rationale tal. Hvad er kardinaliteten af N?

(c) M kan dels forsynes med den metriske toplogi $\mathcal{T}_d$ defineret ved supremumsmetrikken

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|,$$

dels med topologien $\mathcal{T}_p$ induceret af produkttopologien på $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (dvs. delrumstopologien for $M \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Angiv, for hver af disse topologier, en omegnsbasis i $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$.

(d) Vis, at identitetsafbildningen fra $(M, \mathcal{T}_d)$ til $(M, \mathcal{T}_p)$ er kontinuert i ethvert punkt. En af de to topologier er finere end den anden; hvilken, og hvorfor?

(e) Er $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_p$?

Opgave 4 (15 %)

Lad $(M, \mathcal{T})$ være et topologisk rum, og lad $(x_i)_{i\in I}$ være et net i M.

(a) For hvert $i \in I$ defineres delmængden A_i af M ved $A_i = \{\, x_j \mid j \geq i \,\}$, og man sætter

$$F = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Vis, at F netop er lig med mængden af fortætningspunkter for nettet (x_i).

(b) Antag, at nettet er konvergent og M er Hausdorff. Hvordan ser F så ud?

[1] Rettet.