Matematik 3 GT

Opgave til besvarelse i 3 timer.
Opgavesættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.

De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter er med alle sædvanlige hjælpemidler. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af opgave 1.

Opgave 1 (50 %)

Nye topologiske rum ud fra gamle.

Diskutér centrale metoder til at indføre nye topologiske rum ud fra givne topologiske rum. Udover indledende definitioner og tilhørende resultater ses det gerne, at betydningen af de indførte begreber illustreres.

Opgaven er "åben" med flere muligheder for besvarelse. Det kræves, at besvarelsen indeholder præcise ræsonnementer (beviser), men det er ikke et mål i sig selv, at så meget som muligt medtages. Udover stof fra Christian Berg's noter er man velkommen til at inddrage stof fra supplerende materiale, herunder stof behandlet under øvelserne. Besvarelsen skal, ideelt set, fremstå som et afsluttet hele, hvor det dog på grund af den begrænsede tid, der er til rådighed, må forventes, at flere dele kun behandles overfladisk. Der lægges ved bedømmelsen stor vægt på disponeringen af stoffet.

Opgave 2 (25 %)

Lad $X = [0,1]^{\mathbb{R}}$ betegne rummet af funktioner $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ med topologien for punktvis konvergens, dvs. den svageste topologi således at det for ethvert konvergent net $(f_i)_{i\in I}$ i X med grænsefunktion f (altså $f_i \to f$) gælder, at $f_i(x) \to f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

(i) Gør kort rede for at topologien på X netop er produkttopologien.

(ii) For $n \in \mathbb{N}$ betegner A_n mængden af $3n$-tupler $\alpha = (q_1, q_2, \cdots, q_{2n}, r_1, r_2, \cdots, r_n)$ af rationale tal med $q_1 < q_2 < \cdots < q_{2n}$ og $0 \le r_i \le 1$ for $i = 1, \cdots, n$. Bevis, at $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ er numerabel.

(iii) Bevis, at X er separabel. *Vejledning.* For $\alpha \in A_n$ givet som ovenfor kan man betragte en funktion, der for $x \in]q_{2\nu-1}, q_{2\nu}[$ antager værdien r_ν $(\nu = 1, \cdots, n)$.

(iv) For $t \in \mathbb{R}$ betegner vi med f_t funktionen i X givet ved

$$f_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x = t \\ 0 & \text{for } x \neq t \end{cases}.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

Antag, at G_t for hvert $t \in \mathbb{R}$ er en delmængde af X således, at $f_t \in G_t$ og således, at $f(t) > \frac{1}{2}$ for enhver funktion f, der tilhører G_t. Bestem kardinaliteten af mængden af delmængder H af X for hvilke der findes et $t \in \mathbb{R}$, så $H = G_t$.

(v) Bevis, at X ikke opfylder 2.det tællelighedsaksiom.

(vi) Undersøg, om X er metriserbar (i noterne ofte kaldet metrisabel).

(vii) Er det rigtigt, at ethvert kompakt separabelt topologisk rum er metriserbart? (svaret skal begrundes).

Opgave 3 (25 %)

Lad X betegne et topologisk rum der er metriserbart (i noterne ofte kaldet metrisabelt) med en fuldstændig metrik d. For $F \subseteq X$ betegner vi som sædvanlig afstanden fra et punkt $x \in X$ til F med $d(x, F)$, dvs.

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)\,.$$

Lad $(G_n)_{n \geq 1}$ betegne en følge af åbne delmængder af X og sæt $F_n = X \setminus G_n$; $n \geq 1$ samt $X_0 = \bigcap_{n \geq 1} G_n$.

Definér en afbildning $\varphi : X_0 \to X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ved

$$\varphi(x) = \left(x, \frac{1}{d(x, F_1)}\,, \frac{1}{d(x, F_2)}, \cdots \right)\ ;\ x \in X_0\,.$$

(i) Bevis, at φ er veldefineret, injektiv og kontinuert.

(ii) Lad $\Delta \subseteq X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ betegne værdimængden for φ. Bevis, at φ er en homeomorfi af X_0 på Δ.

(iii) Bevis, at Δ er en lukket delmængde af $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *Vejledning.* Antag, at $(\xi_n)_{n \geq 1}$ er en følge af punkter i Δ som konvergerer i $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mod ξ. Lad $\xi_n = \varphi(x_n)$. Lad $\xi = (x, t_1, t_2, \cdots)$. Slut, at $x_n \to x$ og at $d(x, F_1) \neq 0$, $d(x, F_2) \neq 0, \cdots$.

(iv) Bevis, at X_0 er metriserbar med en fuldstændig metrik.

(v) Antag nu, at $X = \mathbb{R}^2$ med sædvanlig topologi. Bevis, at

$$\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q}\}$$

kan metriseres med en fuldstændig metrik.

Bemærkning. Ved besvarelsen af denne opgave kan det være nyttigt at minde om at et tælleligt produkt af fuldstændige metriske rum er fuldstændigt i en metrik, der inducerer produkttopologien, samt at et tilsvarende resultat gælder for lukkede underrum af fuldstændige metriske rum. Man er velkommen til at udnytte disse resultater uden bevis, men det vil være naturligt at anføre en præcis udgave af de resultater, der her sigtes til.