Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 2000-2001

Matematik 3GT

Tre timers skriftlig prøve delvis med hjælpemidler.
Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.
De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler: Forelæsningsnoter, bøger, notater, lommeregnere etc. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af 1. del.

1. del uden hjælpemidler.

Opgave 1 (50 %)

Adskillelsesaksiomer

I den generelle topologi arbejdes med en række såkaldte "adskillelsesaksiomer". Nævn vigtige eksempler på sådanne "aksiomer" og diskuter betydningen af disse ved at udvælge og bevise centrale resultater, der bygger herpå.

Opgaven er "åben" med flere muligheder for besvarelse. Det kræves, at besvarelsen indeholder præcise ræsonnementer (beviser), men det er ikke et mål i sig selv, at så meget som muligt medtages. Udover stof fra Christian Berg's noter er man velkommen til at inddrage stof fra supplerende materiale, herunder stof behandlet under øvelserne. Besvarelsen skal, ideelt set, fremstå som et afsluttet hele, hvor det dog på grund af den begrænsede tid, der er til rådighed, må forventes, at flere dele kun behandles overfladisk. Der lægges stor vægt på disponeringen af stoffet.

2. del med hjælpemidler.

Opgave 2 (15%)

Lad $f : X \to Y$ være en afbildning mellem topologiske rum. Vis, at f er kontinuert, hvis og kun hvis det for enhver delmængde A af X gælder, at $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (15%)

En topologisk egenskab siges at være *hereditær* såfremt det om topologisk rum, der har egenskaben gælder, at ethvert delrum også har egenskaben.

(i) Bevis, at metriserbarhed er en hereditær egenskab (det skal altså vises, at såfremt det topologiske rum X er metriserbart og $X_0 \subseteq X$, så er også X_0 metriserbar, når X_0 udstyres med delrumstopologien).
(ii) Bevis, at regularitet også er en hereditær egenskab.
(iii) Bevis, at Baire-rums egenskaben ikke er hereditær (man skal altså finde et Baire rum X, der indeholder et delrum, der ikke er et Baire rum).

Opgave 4 (20%)

Lad X være et metriserbart topologisk rum og lad d betegne en metrik på X, der inducerer topologien. Lad endvidere $K_0, K_1, \cdots$ være kompakte ikke-tomme delmængder af X. Antag, at det for hvert $n \geq 1$ gælder, at $K_0 \subseteq K_n \subseteq G_n$, hvor G_n betegner mængden af punkter med mindre afstand end $1/n$ til K_0, dvs.

$$G_n = \left\{ x \in X \mid \exists y \in K_0 : d(y, x) < \frac{1}{n} \right\} .$$

Vis, at $A = \bigcup_1^\infty K_n$ er kompakt.

Vejledning. Man kan enten ræsonnere med net eller med overdækninger. I første tilfælde kan man se på et uviversalnet på A og undersøge det tilfælde nærmere, hvor universalnettet ikke konvergerer mod noget punkt i K_0. Arbejder man derimod med overdækninger (hvad de fleste nok vil foretrække), kan man først udtynde en given overdækning af A til en overdækning af K_0.