Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 2000

Matematik 3GT

Tre timers skriftlig prøve delvis med hjælpemidler.
Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.
De første 90 minutter er uden hjælpemidler, de sidste 90 minutter med alle sædvanlige hjælpemidler: Forelæsningsnoter, bøger, notater, lommeregnere etc. Efter 90 minutter indsamles besvarelsen af 1. del.

1. del uden hjælpemidler.

Opgave 1 (25 points)

(a) Formulér Hausdorffs adskillelsesaksiom for et topologisk rum $(X, \mathcal{T})$, samt det 1. tællelighedsaksiom.

(b) Angiv en topologi $\mathcal{T}_0$ på mængden $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ som gør den til et kompakt Hausdorff rum der opfylder det 1. tællelighedsaksiom.

(c) Lad $(X, \mathcal{T})$ være et 1. tælleligt topologisk rum således at grafen for enhver kontinuert funktion fra $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \mathcal{T}_0)$ ind i $(X, \mathcal{T})$ er lukket (= afsluttet). Vis at X er et Hausdorff rum.

Opgave 2 (25 points)

Lad $\mathcal{S}$ betegne en endelig, åben overdækning af intervallet $I = [0, 1]$ udstyret med den sædvanlige topologi. Ved en *forfining* af $\mathcal{S}$ forstås (som sædvanlig) en endelig åben overdækning $\mathcal{R}$ af I således at enhver mængde B fra $\mathcal{R}$ er indeholdt i en eller anden mængde A fra $\mathcal{S}$.

(a) Vis at ethvert $\mathcal{S}$ har en forfining $\mathcal{R}$ der udelukkende består af (relativt) åbne intervaller i I.

(b) Vis at det ikke er muligt at finde et $\mathcal{S}$ således at mængderne i $\mathcal{S}$ er parvis disjunkte.

(c) Vis at ethvert $\mathcal{S}$ har en forfining $\mathcal{R}$ således at intet punkt i I ligger i mere end to mængder fra $\mathcal{R}$.

Vink: Udnyt f.eks. egenskaben (a), og start med det længste interval der indeholder $\{0\}$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (25 points)

Lad $(M, \leq)$ være en velordnet mængde og udstyr M med *ordenstopologien* frembragt af de åbne intervaller

$$I_a = \{x \in M \mid x < a\},$$
$$J_b = \{x \in M \mid b < x\},$$

hvor a, b gennemløber M, jvnf. lærebogens opgave 2.6 (p. 2.12).

(a) Vis at M er et Hausdorff rum.

(b) Vis at hvis M er kompakt så har M et største element (i ordningen $\leq$).

(c) Vis at hvis M har et største element så er M kompakt.
Vink: Hvis $\mathcal{S}$ er en åben overdækning af M så må nogle af de lukkede intervaller

$$F_a = \{x \in M \mid a \leq x\}$$

være overdækket af endelig mange mængder fra S. Vis at det mindste sådant a er det første element i M.

Opgave 4 (25 points)

Lad X betegne den kompakte delmængde af $\mathbb{R}^2$ der fremkommer ved at forene liniestykkerne

$$I \times \{0\}, \quad \{0\} \times I \text{ og } \{\frac{1}{n}\} \times I, \quad n \in \mathbb{N},$$

hvor $I = [0, 1]$.

(a) Vis at der findes en kontinuert funktion $F : X \times I \to X$ så $F(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2)$ og $F(x_1, x_2, 1) = (0, 0)$ samt $F(0, 0, t) = (0, 0)$ for alle x i X og t i I.

(b) Vis at der for ethvert punkt (p_1, p_2) i X findes en kontinuert funktion $F : X \times I \to X$ så $F(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2)$ og $F(x_1, x_2, 1) = (p_1, p_2)$ for alle (x_1, x_2) i X.

(c) Vis at der ikke findes nogen kontinuert funktion $F : X \times I \to X$ således at $F(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2)$ og $F(x_1, x_2, 1) = (0, 1)$ samt $F(0, 1, t) = (0, 1)$ for alle (x_1, x_2) i X og t i I.