

Mathematics 3 GE

This is a 4 hour written exam. All usual resources are allowed. There are a total of 12 questions distributed on 4 problems. Each question carries approximately the same weight but emphasis is also placed on the overall impression. A Danish version follows after the English. Solutions may be written in English or in Danish.

Problem 1

Let f and g be C^∞ functions from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R} . Consider the surfaces

$$S_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

and

$$S_g = \{(u, g(u, v), v) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1°: Prove that S_f and S_g are diffeomorphic.

2°: Prove that if $g = f + c_1$ or if $g = -f + c_2$, with constants $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, then S_f and S_g are isometric.

3°: Show by an example that also other functions g than those mentioned in 2° may define surfaces S_g that are isometric to S_f .

4°: Suppose now that g only depends on u , in other words: $g(u, v) = \phi(u)$ for all $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. The corresponding surface S_g is now called S_ϕ . Construct an isometry of S_ϕ onto \mathbb{R}^2 . (Consider possibly first a reparametrization to arc length of the curve $u \mapsto (u, \phi(u))$.)

Problem 2

Two regular oriented surfaces S_1 and S_2 with Gauss maps N_1 and N_2 , respectively, intersect each other along a curve C in such a manner that they are never tangent to each other. It is assumed that $C = S_1 \cap S_2$ is the trace of a regular curve β , parametrized by arc length. Hence, the assumptions imply among other things that in each point $\beta(s)$ on the curve, $\{\beta'(s), N_1(\beta(s)), N_2(\beta(s))\}$ constitutes a basis for \mathbb{R}^3 (consisting of 3 unit vectors).

1°: Prove that if C is a geodesic on both S_1 and S_2 , then C is a line segment.

2°: Prove that if C is an asymptotic curve on both S_1 and S_2 , then C is a line segment.

Problem 3

Let (X, U) be an orthogonal parametrization of a regular surface S and consider on $X(U)$ the vector fields X_u and X_v .

1°: Compute the covariant derivative

$$(D_{X_v(p)}X_u)(p) = (\nabla_{X_v(p)}X_u)(p)$$

of X_u relative to $X_v(p)$ in an arbitrary point p . The result should be expressed in the basis $\{X_u(q), X_v(q)\}$, with $p = X(q)$, by means of E and G together with derivatives of these.

2°: State necessary and sufficient conditions on E and G for X_u to be a parallel field along all coordinate curves (i.e. both the curves corresponding to u constant as well as those corresponding to v constant).

Problem 4

Let S be a regular oriented surface and let (X, U) be a local parametrization of S , compatible with the orientation, and such that

$$U = \{(u, v) \mid u > 0 \text{ and } v > 0\}.$$

Assume furthermore that the coefficients of the first fundamental form with respect to this parametrization are given by

$$E(u, v) = \frac{1}{2}, \quad F(u, v) = 0, \quad \text{and} \quad G(u, v) = \frac{u^2}{8 \cdot v^2} \text{ for } (u, v) \in U.$$

1°: Consider the curve α on $X(U)$ given by $\alpha(t) = X(t, \frac{t^2}{4})$ (with $t > 0$). Determine the angle of intersection between α and the coordinate curve corresponding to $u = 1$.

2°: Prove that the sum of angles in any geodesic triangle T contained in $X(U)$ is equal to π .

3°: Prove that the vector field $w(t)$ along α given by

$$(3\sqrt{2} \cos(\ln t))X_u(t, \frac{t^2}{4}) + (\frac{-3 \cdot t}{\sqrt{2}} \sin(\ln t))X_v(t, \frac{t^2}{4})$$

is parallel along α .

4°: Determine the geodesic curvature (up to sign) of α in the point $\alpha(t)$ corresponding to $t = e^{\frac{\pi}{2}}$ (it is maybe of use to observe that the angle between the tangent to the curve and X_u is constant).

Matematik 3 GE. Danish Version

Dette er en skriftlig prøve på 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt. Der er ialt 12 spørgsmål fordelt på 4 opgaver. Disse tillægges tilnærmelsesvist samme vægt, idet det dog gælder, at sættes vurderes samlet. Besvarelsenerne kan skrives på engelsk eller på dansk.

Opgave 1

Lad f og g være C^∞ -funktioner fra \mathbb{R}^2 til \mathbb{R} . Betragt fladerne

$$S_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

og

$$S_g = \{(u, g(u, v), v) \mid (u, v) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1°: Bevis, at S_f og S_g er diffeomorfe.

2°: Bevis, at hvis $g = f + c_1$ eller hvis $g = -f + c_2$, med konstanter $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, da er S_f og S_g isometriske.

3°: Vis ved et eksempel, at også andre funktioner g end de i 2° nævnte kan definere flader S_g , der er isometriske med S_f .

4°: Lad nu g kun afhænge af u , med andre ord: $g(u, v) = \phi(u)$ for alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Den tilhørende flade S_g kaldes nu S_ϕ . Konstruer en isometri af S_ϕ på \mathbb{R}^2 . (Betragt evt. først en reparametrisering til kurvelængde af kurven $u \mapsto (u, \phi(u))$.)

Opgave 2

To regulære flader S_1 og S_2 med Gauss afbildninger henholdsvis N_1 og N_2 skærer hinanden langs en kurve C på en sådan måde, at de aldrig tangerer hinanden. Det antages, at kurven $C = S_1 \cap S_2$ er sporet af en regulær kurve β , parametriseret ved buelængde. Antagelserne betyder således blandt andet, at i hvert punkt $\beta(s)$ på kurven udgør $\{\beta'(s), N_1(\beta(s)), N_2(\beta(s))\}$ en basis for \mathbb{R}^3 (bestående af 3 enhedsvektorer).

1°: Bevis, at hvis C er en geodæt på både S_1 og S_2 , da er C et liniestykke.

2°: Bevis, at hvis C er en asymptotisk kurve på både S_1 og S_2 , da er C et liniestykke.

Opgave 3

Lad (X, U) være en ortogonal parametrisering af en regulær flade S og betragt på $X(U)$ vektorfelterne X_u og X_v .

Opgave 3 fortsætter på side 4

1°: Udregn den kovariant afledede

$$(D_{X_v(p)}X_u)(p) = (\nabla_{X_v(p)}X_u)(p)$$

af X_u relativt til $X_v(p)$ i et vilkårligt punkt p . Svaret skal udtrykkes i basen $\{X_u(q), X_v(q)\}$, hvor $p = X(q)$, ved hjælp af E og G samt afledede af disse.

2°: Angiv nødvendige og tilstrækkelige betingelser på E og G for, at X_u er et parallelt langs samtlige koordinatkurver (altså både kurverne svarende til u konstant såvel som dem, der svarer til v konstant).

Opgave 4

Lad S være en regulær orienteret flade, og lad (X, U) være en lokal parametrisering af S , fordragelig (compatible) med orienteringen og således, at

$$U = \{(u, v) \mid u > 0 \text{ og } v > 0\}.$$

Antag videre, at koefficienterne til den første fundamentalform med hensyn til denne parametrisering er givet ved

$$E(u, v) = \frac{1}{2}, \quad F(u, v) = 0 \quad \text{og} \quad G(u, v) = \frac{u^2}{8 \cdot v^2} \quad \text{for } (u, v) \in U.$$

1°: Betragt kurven α på $X(U)$ givet ved $\alpha(t) = X(t, \frac{t^2}{4})$ (med $t > 0$). Bestem skæringsvinklen mellem α og koordinatkurven svarende til $u = 1$.

2°: Bevis, at vinkelsummen i enhver geodætisk trekant T indeholdt i $X(U)$ er lig med π .

3°: Bevis, at vektorfeltet $w(t)$ langs α givet ved

$$(3\sqrt{2} \cos(\ln t))X_u(t, \frac{t^2}{4}) + (\frac{-3 \cdot t}{\sqrt{2}} \sin(\ln t))X_v(t, \frac{t^2}{4})$$

er parallelt langs α .

4°: Bestem den geodætiske krumning (op til fortegn) af α i punktet $\alpha(t)$ svarende til $t = e^{\frac{\pi}{2}}$ (det kan her måske være til nytte at observere, at vinklen mellem tangenten til kurven og X_u er konstant).