Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1997

Matematik 3 GE (gammelt pensum)

Undertegnede erklærer herved, at den af hende/ham indleverede skriftlige besvarelse af opgavesættet for faget Matematik 3GE er udarbejdet uden hjælp af andre.

....
Dato

....
Underskrift

VIGTIGT! – VEDLÆGGES BESVARELSEN

6. juni 1997/HPJ

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1997

Matematik 3 GE

Opgavesæt til besvarelse i løbet af 29 timer.

Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).

Opgavesættet udleveres den 23. juni 1997 kl. 10:00 på Matematisk Afdelings kontor, og besvarelsen afleveres sammen med den udleverede "på tro og love" erklæring samme sted senest den 24. juni 1997 kl. 15:00, dateret og underskrevet af eksaminanden.

Der er ialt 20 spørgsmål. Alle spørgsmål tildeles samme vægt ($6\frac{1}{4}\%$). Det samlede resultat fremkommer som summen af de 16 bedste.

Opgave 1

Der betragtes en 2-dimensional Riemannsk mangfoldighed M samt et kort (f, O) på denne. Det antages, at $O = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ og } x_2 > 0\}$ samt at koefficienterne til den første fundamentalform med hensyn til denne parametrisering er givne ved

$$g_{11}(x_1, x_2) = x_1^4, \quad g_{12}(x_1, x_2) = g_{21}(x_1, x_2) = 0 \text{ og } g_{22}(x_1, x_2) = x_2^4.$$

1°: Find samtlige Christoffelsymboler både af første og af anden art (mht. (f, O)).

2°: Bevis, at $R_{prkl} = 0$ for alle $p, r, k, l \in \{1, 2\}$.

3°: Lad $t \to \alpha(t) = f(x_1(t), x_2(t))$ være en kurve i $f(O)$ defineret i et interval I, der indeholder 0. Bevis, at et vektorfelt $Y(t) = Y^1(t)\frac{\partial}{\partial x_1} + Y^2(t)\frac{\partial}{\partial x_2}$ langs α er parallelt langs α, netop hvis

$$\forall t \in I : Y^1(t) = \frac{Y^1(0)}{x_1^2(t)} \text{ og } Y^2(t) = \frac{Y^2(0)}{x_2^2(t)},$$

og bevis herved, at paralleltransport mellem to punkter $p, q \in f(O)$ er uafhængig af, hvilken kurve fra p til q der paralleltransporteres langs.

4°: Lad $p = f(1, 1)$ og lad $X_p = \frac{\partial}{\partial x_1} + 3\frac{\partial}{\partial x_2} \in T_p(M)$. Find paralleltransporten $X_q = \mathcal{P}_\alpha^q(X_p)$ af X_p til $T_q(M)$, hvor $q = f(2, 3)$, langs en kurve α i $f(O)$ fra p til q, og bevis ved eksplicit udregning, at

$$\|X_p\|_{T_p(M)} = \|X_q\|_{T_q(M)}.$$

5°: Antag, at $\beta(s) = f(x_1(s), x_2(s))$ er en geodæt. Bevis, at funktionen $x_1^2 \cdot x_1'$ er konstant.

6°: Find det generelle udtryk i $f(O)$ for en geodæt $s \to \beta(s)$, der opfylder, at $\beta(0) = f(1, 1)$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2

Lad M være en 2-dimensional differentiabel mangfoldighed. Betragt to kort på M, (f_1, O_1) og (f_2, O_2). Lad koordinaterne i O_1 være beskrevne ved x_1, x_2 og koordinaterne i O_2 ved y_1, y_2. Antag, at Jacobi-matricen $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ hørende til koordinatskiftet

$$(x_1, x_2) \to (f_2^{-1} \circ f_1)(x_1, x_2) = (y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)),$$

i et fast givet punkt (x_1^0, x_2^0) for hvilket $m_0 = f_1(x_1^0, x_2^0) \in f_1(O_1) \cap f_2(O_2)$, er givet ved

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1°: Vektorfeltet X har i punktet $m_0 = f_1(x_1^0, x_2^0)$ følgende udseende med hensyn til kortet (f_1, O_1):

$$X_{m_0} = 5\frac{\partial}{\partial x_1} + 8\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Angiv X_{m_0} ved hjælp af kortet (f_2, O_2).

2°: I lighed med det første spørgsmål ønskes følgende former i m_0 udtrykt ved hjælp af (f_2, O_2):

$$\omega^1_{m_0} = 30 \cdot dx_1 + 40 \cdot dx_2 \quad \text{og} \quad \omega^2_{m_0} = 100 \cdot dx_1 \wedge dx_2.$$

3°: Det oplyses nu, at

$$(f_2^{-1} \circ f_1)(x_1, x_2) = (e^{x_1 - x_2^2}, x_1 x_2).$$

Angiv dy_1, dy_2, og $dy_1 \wedge dy_2$ ved hjælp af (x_1, x_2)-koordinaterne i $f_1(O_1) \cap f_2(O_2)$.

4°: Der betragtes nu en differentiabel afbildning F fra M ind i en 2-dimensional mangfoldighed N. Der betragtes et kort $(\tilde{f}, \tilde{O})$ på N, og koordinaterne i $\tilde{O}$ betegnes z_1, z_2. Med m_0 som tidligere antages nu, at $F(m_0) \in \tilde{f}(\tilde{O})$. Videre antages, med X_{m_0} som før, at

$$F'(X_{m_0})\psi = \frac{\partial}{\partial z_1}\psi + 6\frac{\partial}{\partial z_2}\psi$$

for alle $\psi \in C^\infty(N)$. Endelig antages, at

$$F(f_1(x_1^0 - 2t, x_2^0)) = \tilde{f}(z_1^0 + t, z_2^0 + 2t)$$

for t tilstrækkelig lille. Her er $\tilde{f}(z_1^0, z_2^0) = F(m_0)$. Bestem $F'(\frac{\partial}{\partial x_1} - 4 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2})$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 3

1°: Bevis, at $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_4 + x_2x_3 = -1\}$ er en indlejret delmangfoldighed af $\mathbb{R}^4$.

2°: Angiv eksplicit et atlas $\mathcal{A}$ bestående af præcist to kort.

3°: Lad $N = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = -1\}$. Bevis, at også dette er en indlejret delmangfoldighed af $\mathbb{R}^4$ og begrund, at også her findes et atlas bestående af præcist 2 kort.

4°: Bevis, at afbildningen $M \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \to \frac{1}{2}(x_1 + x_4, x_1 - x_4, x_2 + x_3, x_2 - x_3)$ er en diffeomorfi af M på N.

5°: Vi betragter nu M som en indlejret Riemannsk delmangfoldighed af $\mathbb{R}^4$, hvor $\mathbb{R}^4$ udstyres med metrikken hørende til det sædvanlige indre produkt $\langle v, w\rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4$. Find den første fundamentalform på M, udtrykt ved hjælp af kortene i det fundne atlas $\mathcal{A}$.

Opgave 4

1°: Bevis, at volumenformen $d\theta$ på S^1 (θ er vinklen på S^1) ikke er eksakt. Findes der andre 1-former på S^1, der ikke er eksakte?

2°: Benyt Stokes Sætning til at argumentere for, at volumenformen på S^2 ikke kan være eksakt.

Lad nu funktionen G fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^3$ være givet ved

$$\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \to G(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3) = (x_2^2 \sin x_1, x_2, x_1 + x_2).$$

3°: Lad $\omega_1 = (y_1 dy_2) \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ og $\omega_2 = (y_3 dy_2 \wedge dy_3 + y_3^2 y_1 dy_1 \wedge dy_2) \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Bestem $G^*\omega_1$ og $G^*\omega_2$.

4°: Bestem $d\omega_1, d\omega_2, G^*(d\omega_1)$ og $G^*(d\omega_2)$.

5°: Betragt afbildningen $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ defineret ved

$$\forall (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 : \; S(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1 - z_4, z_2 + z_4, z_3 - z_4).$$

Bestem $S^*\omega_1, S^*\omega_2$ og $d(S^*\omega_2)$.