Matematik 3 GE

Der er ialt 12 spørgsmål fordelt på 3 opgaver. Disse tillægges tilnærmelsesvist samme vægt, idet det dog gælder, at sættes vurderes samlet. Bemærk i øvrigt, at selv indenfor de enkelte opgaver kan visse spørgsmål regnes uafhængigt af de foregående.

Opgave 1

Lad α være en simpel regulær lukket kurve (løber altså glat ind i sig selv) i xy-planen. En delmængde $S = S_\alpha$ af $\mathbb{R}^3$ konstrueres nu som følger: Gennem hvert punkt P på kurven α tegnes linien parallelt med z-aksen. S_α defineres da til at være foreningsmængden af alle disse linier når P gennemløber sporet af α. Det antages yderligere, at α er parametriseret ved buelængde.

1°: Bevis, at S_α er en regulær flade.

2°: Bevis, at fællesmængden mellem S_α og en plan parallel med xy-planen i højden $z_0 \in \mathbb{R}$ er en geodætisk kurve (som punktmængde).

3°: Lad nu S_β fremkomme på tilsvarende vis ud fra en kurve β i xy-planen, hvor β har samme egenskaber som α, herunder samme længde. Bevis, at S_α og S_β er isometriske.

4°: Lad P være et vilkårligt punkt på S_α. Angiv samtlige geodætiske kurver på S_α gennem P i en passende valgt omegn af P.

Opgave 2

I denne opgave betegner S en regulær flade i $\mathbb{R}^3$. Lad U være en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$ så $(0,0) \in U$, og lad $X : U \to \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$X(u,v) = (e^u, e^v, u - v).$$

Det oplyses, at (X, U) er en parametrisering af S.

1°: Lad T være valgt således, at kurven $t \to (t,t)$ forløber indenfor U, når $t \in [0,T]$. Lad $\alpha : [0,T] \to S$ være givet ved $\alpha(t) = X(t,t)$. Find længden af α.

2°: Find koefficienterne E, F og G til den første fundamentalform i et vilkårligt punkt i $X(U)$.

3°: Angiv samtlige Christoffelsymboler Γ_{ij}^k; $i, j, k = 1, 2$, i $X(U)$.

4°: Bevis, at man i ethvert punkt $p \in X(U)$ kan finde en åben omegn V af p i S, som samtidigt fremkommer som graf på følgende 3 måder: $z = f(x,y)$, $y = g(x,z)$ og $x = h(y,z)$ for passende valgte differentiable funktioner f, g og h.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

I denne opgave antages (X, U) at være en lokal parametrisering af en regulær flade S i $\mathbb{R}^3$. Det antages videre, at $U = \mathbb{R}^2$ og at koefficienterne E, F og G til den første fundamentalform er givet ved

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 : E(u,v) = e^{u^2 \cdot v^2},\ F(u,v) = 0 \text{ og } G(u,v) = 4 \cdot e^{u^2 \cdot v^2}.$$

1°: Bestem Gauss-krumningen K i et vilkårligt punkt.

2°: Lad $e_1(u,v) = \frac{X_u(u,v)}{\sqrt{E(u,v)}}, \quad e_2(u,v) = \frac{X_v(u,v)}{\sqrt{G(u,v)}}$ og sæt

$$\phi(t) = r^4 \left(-\frac{5}{16} \cdot t + \frac{5}{64} \sin(4t) \right), \text{ hvor } r \text{ er en positiv konstant.}$$

Bevis, at vektorfeltet $w(t)$ langs kurven $\alpha : t \to X(r\cos(t), r\sin(t))$ givet ved

$$w(t) = \cos(\phi(t)) \cdot e_1(r\cos(t), r\sin(t)) + \sin(\phi(t)) \cdot e_2(r\cos(t), r\sin(t))$$

er parallelt langs α. (Formlerne nederst på siden kan evt. være nyttige.)

3°: Lad $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq r\}$ og sæt $R = X(D) \subset S$. Bestem, evt. under anvendelse af 2°,

$$\int_R K \, d\sigma.$$

4°: Lad $\tilde{S}$ betegne en anden regulær flade i $\mathbb{R}^3$, og lad F være en differentiabel funktion fra S til $\tilde{S}$. Lad $q = X(0,0)$ og $q_1 = F(q)$. Antag, at $(\tilde{X}, \tilde{U})$ er en lokal parametrisering af $\tilde{S}$ med $(0,0) \in \tilde{U}$ og $q_1 = \tilde{X}(0,0)$. Antag endelig, at $\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X$ afbilder kurven $(t, 2t) \cap U$ i kurven $(-t, -2t) \cap \tilde{U}$ og kurven $(t, -2t) \cap U$ i kurven $(t, -2t) \cap \tilde{U}$. Find differentialet af F i q.

---

3 formler for sinus og cosinus:

Følgende formler kan benyttes uden bevis:

$$\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$$
$$\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u)$$
$$1 = \cos^2(u) + \sin^2(u).$$