Matematik 3 GE

Opgavesæt til besvarelse i løbet af 29 timer.

Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).

Opgavesættet udleveres den 8. juni kl. 10:00 på Matematisk Institus kontor, og besvarelsen afleveres sammen med den udleverede "på tro og love" erklæring samme sted senest den 9. juni kl. 15:00, dateret og underskrevet af eksaminanden.

Der er ialt 19 spørgsmål. Alle spørgsmål tildeles samme vægt ($6\frac{1}{4}\%$). Det samlede resultat fremkommer som summen af de 16 bedste.

Opgave 1

Der betragtes en 2-dimensional Riemannsk mangfoldighed M samt et kort (f, O) på denne. Det antages, at $O \subseteq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ og } x_2 > 0\}$, at $(1,1) \in O$ samt at koefficienterne til den første fundamentalform med hensyn til denne parametrisering er givet ved

$$g_{11}(x_1, x_2) = \phi^2(x_2), \quad g_{12}(x_1, x_2) = g_{21}(x_1, x_2) = \psi^2(x_1) \text{ og } g_{22}(x_1, x_2) = \phi^2(x_2),$$

hvor $x_1 \to \psi(x_1)$ er en C^∞-funktion, der opfylder: $\forall x_1 : 0 \leq |\psi(x_1)| < 1$ og $x_2 \to \phi(x_2)$ er en C^∞-funktion, der opfylder: $\forall x_2 : 1 \leq \phi(x_2)$.

1°: Find samtlige Christoffelsymboler både af første og af anden art (mht. (f, O)).

2°: Find R_{1212}. Begrund, at Riemanns krumningstensor derved er fuldstændig beskrevet.

3°: Antag her, at $\psi(x_1)$ er forskellig fra 0 for alle punkter (x_1, x_2) i O. Bevis, at en andenparameterkurve $t \to f(a, t)$ netop er en geodæt hvis ϕ (lokalt) er konstant, og at en førsteparameterkurve $t \to f(t, b)$ er en geodæt såfremt ψ (lokalt) har formen $\psi(x_1) = \pm\sqrt{cx_1 + d}$, hvor konstanten $c = \phi(b)\phi'(b)$.

4°: Antag, at M med de angivne størrelser er en indlejret delmangfoldighed af $\mathbb{R}^3$. Antag, at i et punkt (x_1^0, x_2^0) er middelkrumningen $H = 0$ og $v = 6 \cdot f_{x_1} - 12 \cdot f_{x_2}$ angiver en hovedretning med tilhørende hovedkrumning $k_1 = 4$. Angiv den anden hovedkrumning k_2 og find $c_1, d_1 \in \mathbb{R}$ så den anden hovedretning ligger i retningen $c_1 \cdot f_{x_1} + d_1 \cdot f_{x_2}$.

5°: Antag nu, at $\phi \equiv 1$, at $\psi(x_1) = \cos(x_1)$ og at $|\cos x_1| \neq 1$ på hele O. Betragt kurven $\alpha : t \to f(e^{-t}, e^{-t})$. Find længden af et kurvestykke $\mathcal{C}$ fra $\alpha(0)$ til $\alpha(t_1)$, hvor $t_1 > 0$ og $\mathcal{C} \subset f(O)$. (Brug evt. en passende substitution).

Opgave 2

1°: Bevis, at $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_4 - x_2x_3 = 1\}$ er en indlejret delmangfoldighed af $\mathbb{R}^4$.

 Opgave 2 fortsættes på side 2

2°: Angiv eksplicit et atlas $\mathcal{A}$ bestående af præcist to kort.

3°: Lad $N = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 = 1\}$. Bevis, at også dette er en indlejret delmangfoldighed af $\mathbb{R}^4$ og begrund, at også her findes et atlas bestående af præcist 2 kort.

4°: Bevis, at afbildningen $M \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \to \frac{1}{2}(x_1 + x_4, x_1 - x_4, x_2 - x_3, x_2 + x_3)$ er en diffeomorfi af M på N.

5°: Vi betragter nu M som en indlejret Riemannsk delmangfoldighed af $\mathbb{R}^4$, hvor $\mathbb{R}^4$ udstyres med metrikken hørende til det sædvanlige indre produkt $\langle v, w\rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_4 w_4$. Find den første fundamentalform på M, udtrykt ved hjælp af kortene i det fundne atlas $\mathcal{A}$.

Opgave 3

Lad V være et n-dimensionalt reelt vektorrum udstyret med et positivt definit indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Lad $\{e_1, \ldots, e_n\}$ være en orthonormal basis for V. Definer et indre produkt på $\bigwedge^r(V)$ ved at sætte

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, w_1 \wedge \cdots \wedge w_r \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle)$$

og så udvide ved linearitet. (Det ønskes ikke bevist, at dette er veldefineret).

1°: Bevis, at

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \mid (i_1, \ldots, i_r) \in \mathcal{P}_r^n\}^1$$

udgør en orthonormal basis.

2°: Antag, at M er en indlejret orienteret 2-dimensional delmangfoldighed af $\mathbb{R}^4$. Lad $\{v_1, v_2\}$ være en orthonormal basis for tangentrummet $T_m(M)$ til et fast punkt $m \in M$. Bevis, at 2-formen ω_{v_1, v_2} defineret ved

$$\forall w_1, w_2 \in T_m(M) : \omega_{v_1,v_2}(w_1, w_2) = \det\langle v_i, w_j \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle \langle v_2, w_2 \rangle - \langle v_1, w_2 \rangle \langle v_2, w_1 \rangle$$

op til et fortegn er lig med volumenformen på M i m.

3°: Antag nu, at ω_{v_1,v_2} faktisk er volumenformen i m. Lad i betegne inklusionsafbildningen $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^4$. Lad endelig ω være en vilkårlig 2-form på $\mathbb{R}^4$. Bevis, at

$$(i^*\omega)_m = \langle \omega_m, \omega_{v_1,v_2} \rangle \cdot \omega_{v_1,v_2}.$$

4°: Lad $v_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ og $v_2 = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Lad endelig ω^1 være 1-formen

$$\omega^1 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 + f_4 dx_4$$

[1] Se evt. side 96 i noterne

Opgave 3 fortsættes på side 3

på $\mathbb{R}^4$, hvor $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ for $i = 1, 2, 3, 4$. Da er $(i^* d\omega^1)_m = c \cdot \omega_{v_1, v_2}$. Bestem c i termer af de givne størrelser $x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4, f_1, \ldots, f_4$.

5° (Uafhængigt): Lad $\tilde{M}$ være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed og lad $G : \tilde{M} \to \mathbb{R}^N$ være en differentiabel afbildning. Antag, at $G(\tilde{M}) \subseteq Q$, hvor Q er en indlejret r-dimensional delmangfoldighed af $\mathbb{R}^N$. Lad ω være en $(r+s)$-form på $\mathbb{R}^N$ med $s > 0$. Bevis, at $G^*\omega = 0$.

Opgave 4

Lad M være en 2-dimensional differentiabel mangfoldighed. Betragt to kort på M, (f_1, O_1) og (f_2, O_2). Lad koordinaterne i O_1 være beskrevne ved x_1, x_2 og koordinaterne i O_2 ved y_1, y_2. Antag, at Jacobi-matricen $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ hørende til koordinatskiftet

$$(x_1, x_2) \to (f_2^{-1} \circ f_1)(x_1, x_2) = (y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)),$$

i et fast givet punkt (x_1^0, x_2^0) for hvilket $m_0 = f_1(x_1^0, x_2^0) \in f_1(O_1) \cap f_2(O_2)$, er givet ved

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1°: Vektorfeltet X har i punktet $m_0 = f_1(x_1^0, x_2^0)$ følgende udseende med hensyn til kortet (f_1, O_1):

$$X_{m_0} = 5\frac{\partial}{\partial x_1} - 8\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Angiv X_{m_0} ved hjælp af kortet (f_2, O_2).

2°: I lighed med det første spørgsmål ønskes følgende former i m_0 udtrykt ved hjælp af (f_2, O_2):

$$\omega^1_{m_0} = 30 \cdot dx_1 - 40 \cdot dx_2 \quad \text{og} \quad \omega^2_{m_0} = 200 \cdot dx_1 \wedge dx_2.$$

3°: Det oplyses nu, at

$$(f_2^{-1} \circ f_1)(x_1, x_2) = (e^{x_1 + x_2^2}, x_1 x_2).$$

Angiv dy_1, dy_2, og $dy_1 \wedge dy_2$ ved hjælp af (x_1, x_2)-koordinaterne i $f_1(O_1) \cap f_2(O_2)$.

4°: Der betragtes nu en differentiabel afbildning F fra M ind i en 2-dimensional mangfoldighed N. Der betragtes et kort $(\tilde{f}, \tilde{O})$ på N, og koordinaterne i $\tilde{O}$ betegnes z_1, z_2. Med m_0 som tidligere antages nu, at $F(m_0) \in \tilde{f}(\tilde{O})$. Videre antages, med X_{m_0} som før, at

$$F'(X_{m_0})\psi = 3\frac{\partial}{\partial z_1}\psi + 6\frac{\partial}{\partial z_2}\psi$$

for alle $\psi \in C^\infty(N)$. Endelig antages, at

Opgave 4 fortsættes på side 4

$$F(f_1(x_1^0 - t, x_2^0)) = \tilde{f}(z_1^0 + t, z_2^0 + 2t)$$

for t tilstrækkelig lille. Her er $\tilde{f}(z_1^0, z_2^0) = F(m_0)$. Bestem $F'(\frac{\partial}{\partial x_1} - 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2})$.