Matematik 3 GE

Opgavesæt til besvarelse i løbet af 29 timer.

Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).

Opgavesættet udleveres den 7. juni kl. 10 på Matematisk Institus kontor, og besvarelsen afleveres sammesteds senest den 8. juni kl. 15, dateret og underskrevet af eksaminanden.

Hver opgave tildeles 25 points. Hver opgave indeholder 4 spørgsmål, dog kan man udelade det sidste spørgsmål i to af opgaverne (efter eget valg).

Opgave 1

På torus $T \subseteq \mathbb{R}^3$ betragtes tre lokale kort, $(f, O), (f_+, O_+)$ og (f_-, O_-), givet ved, respektivt,

- $f(\theta, \phi) = ((a + r\sin\theta)\cos\phi, (a + r\sin\theta)\sin\phi, r\cos\theta)$, $\quad O = \{(\theta, \phi) \mid 0 < \theta, \phi < 2\pi\}$.
- $f_\pm(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \pm\sqrt{r^2 - (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a)^2})$, $\quad O_\pm = \{(x_1, x_2) \mid a - r < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < a + r\}$.

Som sædvanlig antages, at $0 < r < a$. Observer også en mindre ændring i forhold til Opgave 78.

På S^2 betragtes også tre lokale kort, $(\tilde{f}, \tilde{O}), (\tilde{f}_+, \tilde{O}_+)$ og $(\tilde{f}_-, \tilde{O}_-)$, definede ved

- $\tilde{f}(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) = (\sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\phi}, \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\phi}, \cos\tilde{\theta})$, $\quad \tilde{O} = \{(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \mid 0 < \tilde{\theta} < \pi, 0 < \tilde{\phi} < 2\pi\}$.
- $\tilde{f}_\pm(y_1, y_2) = (y_1, y_2, \pm\sqrt{1 - (y_1^2 + y_2^2)})$, $\quad \tilde{O}_\pm = \{(y_1, y_2) \mid 0 \le \sqrt{y_1^2 + y_2^2} < 1\}$.

En kontinuert afbildning $F : T \to S^2$ afbilder $T \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$ på $S^2 \cap \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 > 0\}$, og ligeledes afbilder F mængden af punkter i T, hvor $x_3 < 0$, på mængden af punkter i S^2, hvor $y_3 < 0$. Antag, at vi har følgende lokale udtryk:

$$\tilde{f}_-^{-1} \circ F \circ f_-(x_1, x_2) = \tag{1}$$

$$\tilde{f}_+^{-1} \circ F \circ f_+(x_1, x_2) = (y_1, y_2) = \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a}{r\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \cdot (x_1, x_2).$$

Når vi nedenfor refererer til de lokale koordinater (y_1, y_2) betyder det, at vi benytter de lokale kort $(\tilde{f}_\pm, \tilde{O}_\pm)$ og tilsvarende for de andre lokale koordinater.

1°: Angiv $F'(\frac{\partial}{\partial x_1})$ og $F'(\frac{\partial}{\partial x_2})$ ved hjælp af de lokale koordinater y_1, y_2 i punktet $m_1 = F \circ f_+(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}) \in S^2$.

2°: Angiv $F'(\frac{\partial}{\partial \theta})$ og $F'(\frac{\partial}{\partial \phi})$ ved hjælp af de lokale koordinater y_1, y_2 i punktet $m_2 = F \circ f(\frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}) \in S^2$.

 Opgave 1 fortsættes på side 2

3°: Lad $\check{f}_+ : (\check{y}_1, \check{y}_2) \to S^2$ være et lokalt kort på S^2, defineret for $0 < \sqrt{\check{y}_1^2 + \check{y}_2^2} < 1$. Antag, at $\check{f}_+(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = m_2$, og at Jacobimatricen for koordinatskiftet mellem $\check{f}_+$ og $\tilde{f}_+$ opfylder

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \check{y}_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \check{y}_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \check{y}_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \check{y}_2} \end{pmatrix}_{(\check{y}_1, \check{y}_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Angiv $F'(\frac{\partial}{\partial \theta})$ og $F'(\frac{\partial}{\partial \phi})$ ved hjælp af koordinaterne $\check{y}_1, \check{y}_2$ i $(\check{y}_1, \check{y}_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4°: Beskriv afbildningen F ved hjælp af koordinaterne (θ, ϕ) på T og koordinaterne $(\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ på S^2 og angiv præcist den delmængde af O, hvor $\tilde{f}^{-1} \circ F \circ f$ er defineret. Bevis, at F er en differentiabel afbildning fra T til S^2.

Opgave 2

Lad (f, O) være et lokalt kort på en 2-dimensional Riemannsk mangfoldighed M. Lad g_{11}, g_{21}, g_{12} og g_{22} være koefficienterne til den første fundamentalform. Det må antages, at M er en indlejret delmangfoldighed af $\mathbb{R}^3$, og at (f, O) er en af de sædvanlige lokale parametriseringer (som i Definition II.3.). Antag, at g_{12} er identisk nul. Lad de variable i O være betegnede med x_1, x_2. Antag, at koefficienterne kun er funktioner af x_1 (d.v.s. $g_{11}(x_1, x_2) = h_1(x_1)$ og $g_{22}(x_1, x_2) = h_2(x_1)$ for visse funktioner h_1, h_2).

1°: Udregn alle Christoffelsymbolerne af første og af den anden art ud fra (afledede af) funktionerne g_{11}, g_{22}.

2°: Bevis, at hvis $\alpha(t) = f(x_1(t), x_2)$ er en regulær kurve langs en første koordinatkurve, da er

$$(3) \qquad I(\alpha'(t)) = g_{11}(x_1(t), x_2) \cdot (x_1'(t))^2,$$

hvor, som sædvanligt, I betegner den første fundamentalform.

3°: Nedskriv ligningerne som α in 2° skal opfylde for at være en geodæt. Bevis, at de er ækvivalente med, at funktionen $t \to I(\alpha'(t))$ er konstant. Konkluder, at en kurve α som i 2° kan omparametriseres til at være en geodæt.

4°: Antag nu, at $g_{11}(x_1, x_2) = x_1^2$ og $g_{22}(x_1, x_2) = x_1^4$. Antag, at $O = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Anfør, og løs, ligningerne for et parallelfelt langs andenkoordinatkurven $f(1, t)$.

Opgave 3

Betragt en 1-form $\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ på $\mathbb{R}^3$. Lad $v = (v_1, v_2, v_3)$ være en enhedsvektor og $\check{v}$ en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^3$. Lad $L_{v,\check{v}} = \{\check{v} + s \cdot v \mid s \in \mathbb{R}\}$ og lad i betegne inklusionsafbildningen $i : L_{v,\check{v}} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Opgave 3 fortsættes på side 3

1°: Beskriv, hvorledes tangentrummet til ethvert punkt på $L_{v,\check{v}}$ er udspændt af den ene vektor v. Bevis, at

(4) $$i^*\omega = (P \cdot v_1 + Q \cdot v_2 + R \cdot v_3)ds,$$

hvor ds er 1-formen på $L_{v,\check{v}}$, der antager værdien 1 på v i tangentrummet til hvert punkt på $L_{v,\check{v}}$.

2°: Lad α være en regulær kurve i $\mathbb{R}^3$ således, at $L_\alpha = \{\alpha(t) \mid t \in I\}$ er en 1-dimensional indlejret delmangfoldighed. Det må benyttes uden bevis, at (α, I) er et globalt kort på L_α. Generaliser 1° til dette tilfælde.

Betragt afbildningen $(x, y, z) \ni \mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} (u, v) = (e^z x, e^z y) \in \mathbb{R}^2$. Lad $a, b, c \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

3°: Udregn $F^*(a(u,v)du + b(u,v)dv)$.

4°: Udregn $F^*(c(u,v)du \wedge dv)$.

Opgave 4

Lad M være en n-dimensional differentiabel mangfoldighed og lad X være et vektorfelt på M. Lad (f, O) være et lokalt kort på M.

1°: Bevis, at hvis i disse koordinater $X = \sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, da er

(5) $$\forall i = 1, \ldots, n : a_i(x) = dx_i(X).$$

2°: Lad $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ være vilkårlige. Lad $Y_1 = b\frac{\partial}{\partial x_j}$ og $Y_2 = c\frac{\partial}{\partial x_k}$ med b og c vilkårlige C^∞-functioner på $f(O)$. Bestem

(6) $$Y_1(dx_i(Y_2)).$$

3°: Lad ω være en vilkårlig 1-form på M og lad Z_1, Z_2 være vilkårlige vektorfelter på M. Bevis, at

(7) $$d\omega(Z_1, Z_2) = Z_1(\omega(Z_2)) - Z_2(\omega(Z_1)) - \omega([Z_1, Z_2]).$$

4°: (Uafhængig af det foregående) Betragt 2-formen $dp \wedge dq$ på $\mathbb{R}^2 = \{(p,q) \mid p \text{ og } q \in \mathbb{R}\}$. Lad $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Angiv eksplicit vektorfeltet ξ_ψ for hvilket

(8) $$\text{For alle vektorfelter } Y \text{ on } \mathbb{R}^2 : \quad (dp \wedge dq)(\xi_\psi, Y) = Y(\psi).$$