Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1992

Matematik 3 GE

Opgavesæt til besvarelse i løbet af 29 timer.

Opgaverne skal besvares selvstændigt af hver eksaminand uden hjælp fra andre personer (mens brug af fagbøger, egne noter o.l. er tilladt).

Opgavesættet udleveres den 25. juni kl. 10.00 på Matematisk Instituts kontor, og besvarelsen afleveres sammesteds senest den 26. juni kl. 15.00, dateret og underskrevet af eksaminanden.

Hver opgave tildeles 25 points.

Opgave 1

I denne opgave betegner M_1 en delmangfoldighed af dimension 2 af et endelig-dimensionalt vektorrum V_1 og M_2 betegner en delmangfoldighed af dimension 4 af et endelig-dimensionalt vektorrum V_2. Lad (f,ω) være et lokalt kort på M_1 og lad $(\tilde{f},\tilde{\omega})$ være et lokalt kort på M_2. Vi vil her tænke på ω som en delmængde af $\mathbb{R}^2$, hvor punkterne skrives (x_1,x_2), og $\tilde{\omega}$ som en delmængde af $\mathbb{R}^4$ med punkter skrevne som (y_1,y_2,y_3,y_4). Lad F være en differentiabel afbildning fra M_1 til M_2. Antag, at $m \in f(\omega)$ og $F(m) \in \tilde{f}(\tilde{\omega})$.

Det antages først, at $F'_m : T_m(M_1) \to T_{F(m)}(M_2)$ opfylder:

$$F'_m(f_{x_1}) = 2\tilde{f}_{y_1} + 3\tilde{f}_{y_2} - \tilde{f}_{y_4}$$
$$F'_m(f_{x_1} + \frac{1}{2}f_{x_2}) = \tilde{f}_{y_1} + 5\tilde{f}_{y_3}\ .$$

Beskriv F'_m ved en matrix. Oversæt dernæst resultatet til derivationer og beskriv herved hvilken derivation af $C^\infty_{\text{lok}}(F(m))$ en vilkårlig derivation $\lambda_1\partial/\partial x_1 + \lambda_2\partial/\partial x_2$ $(\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R})$ af $C^\infty_{\text{lok}}(m)$ afbildes over i via F'_m.

Angiv endelig en kurve $t \to \tilde{\gamma}(t)$ på M_2 med $\tilde{\gamma}(0) = F(m)$ således, at $\forall\psi \in C^\infty_{\text{lok}}(F(m))$: $(F'_m(f_{x_2}))(\psi) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\psi(\tilde{\gamma}(t))$.

Opgave 2

Lad $I \ni v \to (0,a(v),b(v))$ være en regulær kurve i yz-planen således, at $\forall v \in I : a(v) > 0$. Antag yderligere, at $\{\,(0,a(v),b(v)) \mid v \in I\,\}$ er en delmangfoldighed af yz-planen og lad $\mathcal{O}$ være omdrejningsfladen, der fremkommer ved at dreje denne kurve om z-aksen. Dette er en delmangfoldighed af $\mathbb{R}^3$ (skal ikke bevises). Betragt kortet (κ,ω) på $\mathcal{O}$ givet ved

$$\omega =]0,2\pi[\times I \ni (u,v) \to \kappa(u,v) = (a(v)\cos u, a(v)\sin u, b(v))\ .$$

 Opgave 2 fortsættes på side 2

Find pull-back'et $i^*\Omega$ samt $d(i^*\Omega)$ udtrykt via det angivne kort for følgende former på $\mathbb{R}^3$, idet i betegner inklusionsafbildningen $i : \mathcal{O} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, defineret ved $i(p) = p$ for alle $p \in \mathcal{O}$:

- $\Omega = dx_1$
- $\Omega = x_3 dx_2$
- $\Omega = dx_2 \wedge dx_3$
- $\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Opgave 3

I denne opgave skal man først udfylde detaljerne vedrørende et par påstande i de supplerende noter til Hörmander (ugeseddel 5). M betegner en delmangfoldighed af dimension n af et endelig-dimensionalt vektorrum V af dimension N, og (F, U) er et par som i betingelse (1) side 9 i Hörmander for M. Vi vil i øvrigt overalt i denne opgave fortolke kravet til, at F' skal være surjektiv, som noget, der kun skal være opfyldt på $M \cap U$.

Vis explicit, at

$$\forall X \in M \cap U : T_X(M) = \ker F'(X) .$$

Vis dernæst, at (F, U) kan gøres til et tilsvarende par $(\tilde{F}, \tilde{U})$ for $T(M)$ ved forskriften

$$\tilde{F}(X, Y) = (F(X), F'(X)(Y)) \quad \text{for} \quad (X, Y) \in \tilde{U} = U \times \mathbb{R}^N .$$

Vis endelig, i tilfældet $n = 2$ og $N = 3$, at

$$S(M) = \{ (X, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid X \in M, v \in T_X(M) \text{ og } \|v\| = 1 \}$$

er en delmangfoldighed af $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Hvad er dimensionen?

Opgave 4

Betragt den øvre halv-plan i $\mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{Y}_+ = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \} .$$

Antag, at den første fundamentalform med hensyn til det naturlige kort $(I, \mathcal{Y}_+)$ (hvor I betegner den identiske afbildning) er givet ved

$$\{ g_{ij} \} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} .$$

- Bestem $\nabla_{x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}} y\frac{\partial}{\partial x}$.

Opgave 4 fortsættes på side 3

- Bevis, at $\nabla_{\frac{\partial}{\partial_y}} y^n \frac{\partial}{\partial_y} = (n+1)y^{n-1}\frac{\partial}{\partial_y}$ for et vilkårligt $n \in \mathbb{Z}$.
- Bevis, evt. under anvendelse af det foregående resultat, at der til enhver lodret linie $l_{x_0} = \{(x_0, y) \mid y > 0\}$ findes en geodæt på $\mathcal{Y}_+$, $t \to \gamma_{x_0}(t) = (x_0, \psi(t))$. Bevis, at den mest generelle form for ψ er

$$\psi(t) = \sqrt{c \cdot t + d}\,.$$

  Hvad er betydningen af konstanterne c og d?
- Bestem det parallelfelt langs kurven γ_0 svarende til $x_0 = 0$, der i punktet $(0,1)$ har værdien $\frac{\partial}{\partial_x} \in T_{(0,1)}(\mathcal{Y}_+)$.