Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1992

Matematik 3 GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.
Sættet består af 2 opgaver med tilsammen 9 spørgsmål. En besvarelse anses kun for fuldstændig, såfremt samtlige 9 spørgsmål er korrekt besvarede.

Opgave 1

I denne opgave betegner S_1 og S_2 regulære flader. Lad U være en åben delmængde af $\mathbf{R}^2$ så $(0,0) \in U$ og lad $X : U \to \mathbf{R}^3$ være givet ved

$$X(u,v) = (\sinh u, \sinh v, u - v)\,.$$

Det oplyses, at (X, U) er en parametrisering af S_1.

1° Find koefficienterne E, F og G til den første fundamentalform i et vilkårligt punkt i $X(U)$.

2° Beregn Gauss-krumningen K i et vilkårligt punkt i $X(U)$.

3° Bevis, at man til ethvert punkt $p \in X(U)$ kan finde en åben omegn V af p i S_1, som samtidigt fremkommer som graf på følgende tre måder: $z = f(x,y), y = g(x,z)$ og $x = h(y,z)$ for passende valgte differentiable funktioner f, g og h.

4° Lad F betegne en differentiabel funktion fra S_1 til S_2. Lad $q_1 = X(0,0)$ og $q_2 = F(q_1)$. Antag, at $(\tilde{X}, \tilde{U})$ er en parametrisering af S_2 så $(0,0) \in \tilde{U}$ og $\tilde{X}(0,0) = q_2$. Det oplyses nu, at $\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X$ afbilder kurven $(2t, 3t) \cap U$ i kurven $(-t, 3t) \cap \tilde{U}$ og kurven $(-2t, t) \cap U$ i kurven $(2t, 2t) \cap \tilde{U}$. Find differentialet af F i q_1.

5° I et givet punkt $p_0 = \tilde{X}(u_0, v_0) \neq \tilde{X}(0,0)$ er $\tilde{X}_u(u_0, v_0) - 3\tilde{X}_v(u_0, v_0)$ en hovedretning med tilhørende hovedkrumning 12. Endvidere er $E = 3$, $G = 1$, $F = 0$ og $K = 3$ i dette punkt. Bestem den anden hovedretning og hovedkrumning.

Opgave 2

I det følgende betegner $X : U \to X(U) \subset S$ en lokal parametrisering af en regulær flade S. Det oplyses at $U =]-1, \infty[\times]-1, \infty[$ og at koefficienterne til den første fundamentalform, betragtet som funktioner på U, er givet ved

$$E(u,v) = \left(u(v-1)^2 + 3\right)^2\;, \quad F(u,v) = 0\;, \quad \text{og} \quad G(u,v) = 3\,.$$

Det antages yderligere, at S er orienterbar, og at orienteringen i $X(U)$ stemmer overens med den, der er givet gennem parametriseringen.

1) Bestem Christoffelsymbolerne Γ^i_{jk} for alle

$$i, j, k \in \{1, 2\}\,.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

2° De tre kurver

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= X(2-t,1)\,; \quad t \in [0,1]\\ \gamma_2(t) &= X(1,1-t)\,; \quad t \in [0,1]\\ \gamma_3(t) &= X(1+t,t)\,; \quad t \in [0,1]\end{aligned}$$

udgør siderne i en trekant T indeholdt i S. Beskriv paralleltransportafbildningen langs hver af disse tre sider af T.

3) Bestem de indre vinkler i T.

4) Bestem Gausskrumningen K og $\int_T K d\sigma$.