Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1991-92

Matematik 3GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

Sættet består af 2 opgaver med tilsammen 9 spørgsmål. Hvert spørgsmål tillægges samme vægt.

Opgave 1

Lad α være en simpel regulær lukket plan kurve, som vi tænker os beliggende i den kopi af $\mathbb{R}^2$, der svarer til planen $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \mid y = 1\}$. Med andre ord, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), 1, \alpha_2(s))$. Antag yderligere, at α er parametriseret ved kurvelængde. En delmængde $S = S_\alpha$ af $\mathbb{R}^3$ konstrueres nu som følger: Gennem hvert punkt P på kurven α tegnes linien $t \cdot \overrightarrow{OP}$, idet parameteren t dog indskrænkes til at ligge i $]0, 2[$. S_α defineres da til at være foreningsmængden af disse punktmængder for P gennemløbende sporet af α. Det antages yderligere, at krumningen af α aldrig bliver 0.

1° Vis, at S_α er en regulær flade.

2° Udregn koefficienterne E, F, G til den første fundamentalform for S med hensyn til en parametrisering af typen

$$X(s, t) = \begin{pmatrix} t \cdot \alpha_1(s) \\ t \\ t \cdot \alpha_2(s) \end{pmatrix},$$

med definitionsmængderne for s og t passende indskrænket.

3° Udregn koefficienterne til den anden fundamentalform samt hovedkrumningerne i et punkt P på kurven for hvilket $\overrightarrow{OP}$ er vinkelret på tangenten til kurven i P (det antages, at der findes sådanne punkter), og udtryk disse størrelser ved krumningen af α samt længden $|\overrightarrow{OP}|$ af $\overrightarrow{OP}$.

4° Antag nu, at definitionsområdet for X er størst muligt med hensyn til førstekoordinaten s. Bevis, at andenkoordinatkurverne $t \to X(s, t)$ altid er geodæter, hvorimod førstekoordinatkurverne $s \to X(s, t)$ aldrig er det, idet sidstnævnte ville kræve, at $(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ og $(\alpha_1'(s), \alpha_2'(s))$ var proportionale i hele definitionsmængden for kurven α.

5° Lad nu β være en anden kurve i $\mathcal{P}$ af samme slags som α, og lad S_β betegne den tilsvarende flade. Bevis, at S_α og S_β er diffeomorfe.

6° Lad $C_{\gamma_1} = \{(x, 1, z) \mid \frac{x^4}{a^4} + \frac{z^4}{b^4} = 1\}$ fremkomme som sporet af en simpel regulær lukket plan kurve γ_1 (dette skal ikke bevises), og lad $C_{\gamma_2} = \{(x, 1, z) \mid \frac{x^4}{b^4} + \frac{z^4}{a^4} = 1\}$ fremkomme som sporet af en tilsvarende kurve γ_2. Bevis, at S_{γ_1} og S_{γ_2} er isometriske.

Opgave 2

Lad S være en regulær flade, lad U være en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$ og lad $(u,v) \to X(u,v) \in S$ være en parametrisering af S defineret på U. Gennem hele opgaven gælder, at koefficienterne E, F, G til den første fundamentalform for S, udregnet med hensyn til (X, U), opfylder følgende: E er kun en funktion af u, G er kun en funktion af v og F er identisk nul.

1° Lad $w(t)$ være et parallelt vektorfelt langs en parametriseret kurve $X(u(t), v(t))$. Bevis, at vinklen mellem $X_u(u(t), v(t))$ og $w(t)$ er uafhængig af t.

2° Bevis, evt. under brug af 1° (men det kan også bevises direkte), at Gauss-krumningen K er identisk nul.

3° Bevis, evt. ved at betragte parametriseringer af $\mathbb{R}^2$ af formen $(u,v) \to (\varphi(u), \psi(v))$, at $X(U)$ er lokalt isometrisk med $\mathbb{R}^2$.