Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommer 1991

Matematik 3GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

Sættet består af 2 opgaver med tilsammen 9 spørgsmål. Hvert spørgsmål tillægges samme vægt.

Opgave 1

En delmængde $S = S(a, b, \vec{v}) = S(a, b, v_1, v_2, v_3)$ af $\mathbf{R}^3$ konstrueres som følger: Gennem ethvert punkt på ellipsen $E = \{(a\cos s, b\sin s, 0) \mid s \in [0, 2\pi]\}$ i xy-planen tegnes den rette linie parallel med en fast given enhedsvektor $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i $\mathbf{R}^3$. S er da foreningsmængden af alle disse linier. I det følgende antages, at $a > 0, b > 0$, og $v_3 \neq 0$.

1) Bevis, at S er en regulær flade.
2) Udregn koefficienterne til den første fundamentalform i en parametrisering af formen $X(s,t) = (a\cos s + tv_1, b\sin s + tv_2, tv_3)$, med (s,t) i en passende mængde. Bestem endvidere koefficienterne til den anden fundamentalform i punktet $p_0 = X(\pi/2, 1)$.
3) I dette spørgsmål må antages, at $v_1 = 0$. Angiv i et vilkårligt punkt $p \in S$ mindst *én* hovedretning og bestem endvidere i det i spørgsmål 2) definerede punkt p_0 *begge* hovedretninger og hovedkrumninger.
4) Bevis, at $S(a, b, v_1, v_2, v_3)$ er isometrisk med $S(b, a, v_2, -v_1, -v_3)$.
5) For visse af fladerne gælder, at snittet mellem $S(a, b, \vec{v})$ og en plan vinkelret på $\vec{v}$ er en cirkel. Bevis, at alle sådanne flader er lokalt isometriske.

Opgave 2

I det følgende betegner $X : U \to X(U) \subseteq S$ en lokal parametrisering af en regulær flade S. Det oplyses at $U =]-1, \infty[\times]-1, \infty[$ og at koefficienterne til den første fundamentalform, betragtet som funktioner på U, er givet ved

$$E(u,v) = 3\,, \quad F(u,v) = 0\,, \quad \text{og } G(u,v) = (2v^2(u-1)^2 + 1)^2\,.$$

Det antages yderligere, at S er orienterbar, og at orienteringen i $X(U)$ stemmer overens med den, der er givet gennem parametriseringen .

1) Bestem Christoffelsymbolerne Γ^i_{jk} for alle $i, j, k \in \{1, 2\}$.

Opgave 2 fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommer 1991
Matematik 3GE

2) De tre kurver

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= X(t, 1-t)\,; && t \in [0,1] \\
\gamma_2(t) &= X(1, t)\,; && t \in [0,1] \\
\gamma_3(t) &= X(1-t, 1)\,; && t \in [0,1]
\end{aligned}$$

udgør siderne i en trekant T indeholdt i S. Beskriv paralleltransportafbildningen langs hver af disse tre sider af T.

3) Bestem de indre vinkler i T.

4) Bestem Gausskrumningen K og $\int_T K d\sigma$.