Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990-91

Matematik 3GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

Sættet består af 3 opgaver med tilsammen 12 spørgsmål. Et korrekt besvaret spørgsmål giver 10 point og den samlede besvarelse anses for fuldstændig, såfremt man ialt har opnået mindst 100 point.

Opgave 1

Lad S være en regulær flade og lad $p \in S$. I det følgende betegner (X, U) en lokal parametrisering af en omegn $V = X(U)$ af p, og U antages at være en åben sammenhængende delmængde af uv-planen.

1° Om koefficienterne E, F og G til den første fundamentalform hørende til (X, U) antages, at E og G er konstante i U. Angiv et eksplicit udtryk for Gauss-krumningen K.

2° Angiv, under de samme antagelser som i 1°, en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at samtlige kurver $u \to X(u, v)$ er geodæter.

3° Nu fraviges antagelsen fra 1° lidt, idet det antages, at E er en funktion af u og G er en funktion af v. Til gengæld antages videre, at samtlige kurver svarende under X til fastholdelse af enten den første eller den anden koordinat i U er geodæter. Bevis, at da er både E, F og G konstante. (Bevis eventuelt først, at E og G er konstante.)

4° Bevis, at hvis E, F og G er konstante i U, da er $X(U)$ isometrisk med en åben delmængde af planen.

Opgave 2

1° Lad $\mathcal{P}$ betegne en plan og lad S være en regulær flade. Antag, at $\mathcal{P}$ og S skærer hinanden i et punkt p og at de to normaler til henholdsvis planen og fladen i p danner en vinkel $\theta \in]0, \pi[$. Bevis, at $C = \mathcal{P} \cap S$ er en regulær kurve i en omegn af p. (Bevis eventuelt først, at S i en omegn af p er en graf over $\mathcal{P}$).

2° Lad k betegne krumningen af C i p og lad k_n betegne normalkrumningen af C, betragtet som kurve på S. Bevis, at

$$k_n = \pm \sin(\theta) \cdot k \,.$$

3° Lad S_1 og S_2 være regulære flader, der skærer hinanden i et punkt p på en sådan måde, at de to normaler ikke er parallelle i p. Bevis, at $C = S_1 \cap S_2$ er en regulær kurve i en omegn af p.

 Opgave 2 fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt afbildningen X af $\mathbb{R}^2$ ind i torus'en T givet ved

$$X(u,v) = \big((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u\big) ,$$

hvor som sædvanlig $a > r > 0$.

1° Lad $0 < u_1 < u_2 < 2\pi$ og $0 < v_1 < v_2 < 2\pi$ og lad $R = X([u_1, u_2] \times [v_1, v_2])$. Angiv arealet $A(R)$ og $\int_R K d\sigma$, hvor K betegner Gauss-krumningen på T.

2° Lad C betegne den stykvist regulære kurve, der fremkommer som randen af R. Vælg det udadrettede normalvektorfelt og beskriv paralleltransportafbildningen rundt langs C.

3° Vi definerer en afbildning F ved

$$F\big(X(u,v)\big) = X(v,u) .$$

Bevis, at dette er en veldefineret, differentiabel afbildning $F : T \to T$.

4° Find differentialet dF_q i $q = X(\pi/2\,,\,\pi/2)$ og i $q = X(0,0)$.

5° Er restriktionen af F til passende små omegne en lokal isometri ? – Begrund svaret.