Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1990

Matematik 3 GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Sættet består af 2 opgaver med tilsammen 12 spørgsmål. En besvarelse anses for fuldstændig, såfremt 10 af sættets ialt 12 spørgsmål er korrekt besvarede.

Lad $I =]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ og lad $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ være en regulær kurve i yz-planen,

$$\forall u \in I : \alpha(u) = (0, f(u), g(u)) .$$

Antag yderligere at $f(u) > 0$ for alle u i I.
I både Opgave 1 og Opgave 2 betragtes generalisationer af begrebet "omdrejningsfladen bestemt af α", idet man erstatter den cirkulære rotation omkring z-aksen med en mere generel elliptisk bevægelse. Helt konkret defineres, for $c > 0$ og $d > 0$ følgende delmængde af $\mathbb{R}^3$:

$$S(\alpha, c, d) := \{X(u,v) = (f(u)c\cos v, f(u)d\sin v, g(u)) \mid u \in I \text{ og } v \in \mathbb{R}\} .$$

Opgave 1

Med $S(\alpha, c, d)$ defineret som ovenfor antages overalt i denne opgave at α ikke har selvgennemskæringer, og at α er parametriseret ved kurvelængde.

1° Bevis, at $S(\alpha, c, d)$ er en regulær flade og bestem koefficienterne E, F, G til den første fundamentalform med hensyn til en parametrisering af formen

$$X_J(u,v) = X(u,v) \qquad \forall (u,v) \in I \times J ,$$

hvor J er et passende åbent interval.

2° Bestem koefficienterne til den anden fundamentalform med hensyn til samme parametrisering og bevis, at Gauss-krumningen K er nul i alle punkter på $S(\alpha, c, d)$ svarende til værdier $u \in I$ for hvilke krumningen k af α i $\alpha(u)$ er nul.

3° Antag at $f(u) = \frac{u}{\sqrt{2}} = g(u)$ for $u \in I =]0, \infty[$. Antag yderligere, at $c = 5/7$, $d = 5$ og $v = \pi/4$. Bestem hovedkrumningerne og hovedretningerne i et punkt svarende til et vilkårligt $u \in I$.

Opgave 1 fortsættes på side 2

4° Vi vender tilbage til den generelle situation beskrevet i starten af denne opgave. Angiv mindst 4 geodæter på $S(\alpha, c, d)$. Begrund svaret.

5° Bevis, at $S(\alpha, c, d)$ og $S(\alpha, d, c)$ er isometriske.

De i spørgsmål 6°, 7° og 8° indgående kurver $v \to X(u_0, v)$ kan passende kaldes generaliserede paralleller.

6° Bevis, at hvis $f'(u_0) = 0$, da er sporet af kurven $v \to X(u_0, v)$ en geodæt, samt at samme spor aldrig kan være en geodæt, hvis $g'(u_0) = 0$ (og altså $f'(u_0) \neq 0$).

7° Antag, at $f'(u) = 0$ for alle $u \in I$. Bestem den kovariant afledede med hensyn til X_v af en kurve af formen $v \to X(u_0, v)$.

8° Lad $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en tællelig følge af parameterværdier liggende i I. Antag $u_n < u_{n+1}$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og at følgen konvergerer mod et $\breve{u} \in I$;

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \breve{u} .$$

For hvert u_n fjernes sporet af kurven $v \to X(u_n, v)$ ($v \in \mathbb{R}$) fra $S(\alpha, c, d)$. Når alle disse punktmængder er fjernede, er da det resterende stadig en regulær flade?

Opgave 2

I konstruktionen før Opgave 1 antages nu at $I =]-\infty, \infty[$, at der findes et positivt tal l således at

$$\forall u \in I : \alpha(u + l) = \alpha(u)$$

samt at α ikke har selvgennemskæringer på $]0, l[$. Vi kan med andre ord tænke på α som en glat lukket simpel kurve defineret på $[0, l]$. Vi lader $S(\alpha, l, c, d)$ betegne den resulterende flade. Iøvrigt antages α ikke nødvendigvis at være parametriseret ved buelængde, men den skal stadig være regulær. Det oplyses at $S(\alpha, l, c, d)$ er en regulær flade. (Kræves ikke bevist.)

1° Bevis, eventuelt ved eksplicit at beskrive en passende afbildning, at to vilkårlige sådanne flader $S(\alpha_1, l_1, c_1, d_1)$ og $S(\alpha_2, l_2, c_2, d_2)$ er diffeomorfe. Giv også et abstrakt argument for, at de er homeomorfe.

2° Lad $v_0 \in]0, \pi/2[$ og definer

$$S(\alpha, l, c, d)_{v_0} = \{(f(u)c \cos v, f(u)d \sin v, g(u)) \mid u \in [0, l] \text{ og } v_0 \leq v \leq v_0 + \pi\} .$$

Bevis, at

$$\int_{S(\alpha, l, c, d)_{v_0}} K d\sigma = 0 ,$$

hvor K betegner Gauss-krumningen.

Opgave 2 fortsættes på side 3

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1990
Matematik 3 GE

Lad nu

$$(\Delta) \qquad \alpha(u) = (0, 1 + c_0 \cos u + d_0 \sin u, c_0 \cos u)$$

for $u \in [0, 2\pi]$, med c_0 og d_0 reelle positive konstanter så $d_0 + c_0 < 1$.

3° Lad $v \to X(u_1, v)$ være den generaliserede parallel der svarer til den største z-værdi ($z = c_0 \cos u_1$) og lad tilsvarende $v \to X(u_2, v)$ være den generaliserede parallel med den mindste z-værdi. Antag at $0 \leq u_1 < u_2 \leq 2\pi$ og lad

$$\check{S}(\alpha, 2\pi, c, d) = \{X(u, v) \mid u_1 \leq u \leq u_2 \text{ og } 0 \leq v \leq 2\pi\} .$$

Bevis, at

$$\int_{\check{S}(\alpha, 2\pi, c, d)} K d\sigma = \pm 4\pi .$$

Bestem fortegnet.

4° Betragt, med $v_0 \in]0, \pi[$ som før og α som i (Δ), firkanten

$$S_{v_0} = \{X(u, v) \mid 0 \leq u \leq \pi \text{ og } v_0 \leq v \leq v_0 + \pi\} .$$

Begrund at paralleltransportafbildningen rundt langs randkurven af S_{v_0} er den identiske afbildning.