Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1989-1990

Matematik 3 GE

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Sættet består af 3 opgaver med tilsammen 12 spørgsmål. En besvarelse anses for fuldstændig, såfremt 10 af sættets ialt 12 spørgsmål er korrekt besvarede.

Opgave 1

En delmængde S af $\mathbf{R}^3$ konstrueres som følger:
Lad S^1 betegne cirklen med ligningen $x^2 + y^2 = 4$ i xy-planen, og lad AB betegne det åbne liniestykke i yz-planen givet ved $y = 2$, $|z| < 1$. Centret c af AB bevæges rundt langs S^1, idet AB samtidig drejes således, at når c er drejet vinklen u hen i punktet $c(u)$, da er AB også drejet vinklen u i planen vinkelret på tangenten til S^1 i $c(u)$. Når c har fuldført en omdrejning vender liniestykket således tilbage til sin oprindelige position. (S er dermed *ikke* Möbius-båndet). Lad

$$U = \{(u,v) \mid o < u < 2\pi \text{ og } -1 < v < 1\} \text{ og}$$
$$X(u,v) = ((2 - v\sin u)\sin u, (2 - v\sin u)\cos u, v\cos u));\ (u,v) \in U\ .$$

Helt konkret er da $S = X(U) \cup AB$. Det kan indtil videre bruges uden bevis, at S er en regulær flade.

1° Bevis, at $X : U \to S$ er en parametrisering.

2° Udregn koefficienterne til den første fundamentalform i et vilkårlig punkt $p \in X(U)$.

3° Angiv i et vilkårligt punkt $q \in S$ mindst én geodætisk kurve på S gennem q.

4° Udregn koefficienterne til den anden fundamentalform i $p_0 = X(\pi, 0)$.

~~5° Udregn den kovariant afledede af vektorfeltet X_u langs $S^1 \cap X(U)$.~~

6° Begrund, eventuelt geometrisk, at S er regulær og orienterbar.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2

Lad $f(x,y) = \frac{1}{12}(4-(x-2)^2-(y-3)^2)^2$ og lad S betegne grafen for f;

$$S = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} .$$

Med $X : \mathbb{R}^2 \to S$ betegnes den sædvanlige parametrisering af en graf over xy-planen; $X(x,y) = (x,y,f(x,y))$.
Lad D være den lukkede cirkelskive med radius 2 og centrum i $(2,3)$ i xy-planen og lad ∂D betegne randen for D, d.v.s. cirklen givet ved ligningen $(x-2)^2+(y-3)^2 = 4$. Sæt endelig $S_D = X(D)$ og $C = X(\partial D)$.

1° Beskriv parallеltransportafbildningen langs C.

2° Bestem integralet af Gauss-krumningen K over S_D.

3° Lad $\tilde{D}$ betegne den lukkede cirkelskive i xy-planen med radius 1 og centrum i $(2,3)$ og lad $S_{\tilde{D}} = X(\tilde{D})$.
Bestem integralet af K over $S_{\tilde{D}}$.

4° (Helt uafhængigt af det foregående).

Lad M betegne et helt positivt tal og lad B_M betegne en delmængde af D fremkommet ved at man har fjernet M åbne cirkelskiver $\mathring{D}_1, \dots, \mathring{D}_M$ fra D; $B_M = D \setminus (\mathring{D}_1 \cup \dots \cup \mathring{D}_M)$. Det antages her, at de tilsvarende lukkede cirkelskiver er helt indeholdt i det indre af D og at de endvidere er parvist disjunkte. Lad $S_M = X(B_M)$. Hvad er Euler karakteristikken af S_M ?

Opgave 3

I denne opgave betegner S en regulær orienteret flade med orientering N. Det oplyses, at der findes en parametrisering $X : U \to S$ af S, hvor U er en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$ indeholdende $(0,0)$, således at endvidere $X_N = N \circ X : U \to S^2$ er en parametrisering af S^2.

1° Der gælder, at

$$N(X(t,4t)) = X(t,-4t) \text{ og}$$
$$N(X(-t,-2t)) = X(-3t,-2t) ,$$

for $|t|$ tilstrækkelig lille. Bestem Gauss-krumningen K og middelkrumningen H af S i punktet $X(0,0)$.

2° I et givet punkt $p_0 = X(u_0,v_0) \neq X(0,0)$ er $X_u(u_0,v_0) + 2X_v(u_0,v_0)$ en hovedretning med tilhørende hovedkrumning 8. Endvidere er $E = 1$, $G = 4$, $F = 0$ og $K = 4$ i dette punkt. Bestem den anden hovedretning og hovedkrumning.